MAILLARD & MILLET

# MÉCANIQUE

Classe de Mathématiques

LIBRAIRIE HACHETTE

## NOUVEAU COURS DE MATHÉMATIQUES

**conforme aux programmes de 1957, de 1958 et de 1960.**

publié sous la direction de M. Roland Maillard.
*Inspecteur général de l'Instruction publique.*

**Classe de Sixième** : *Mathématiques*, par R. CAHEN
Programmes unifiés. Un volume.

**Classe de Cinquième** : *Mathématiques*, par R. CAHEN
Programmes unifiés. Un volume.

**Classe de Quatrième** : *Mathématiques*, par R. MAILLARD et E. CARALP
Un volume.

**Classe de Troisième** : *Mathématiques*, par R. MAILLARD R. CAHEN et E. CARALP
Un volume.

**Classe de Seconde** : *Mathématiques*, par G. GIRARD et A. LENTIN
Un volume.

## COURS DE MATHÉMATIQUES

**par**

ROLAND MAILLARD et ALBERT MILLET

Inspecteur général de l'Instruction publique.

Professeur au Lycée Janson-de-Sailly et à l'E. N. S. E. T.

**Classes de Première classique A et B** : *Mathématiques*. Un volume.

**Classes de Première classique C et Moderne** :

*Algèbre et Trigonométrie*. Un volume. *Géométrie*. Un volume.

**Classe de Mathématiques** :

*Algèbre*. Un volume. *Géométrie*. Un volume.
*Arithmétique*. Un volume. *Géométrie descriptive*. Un volume.
*Cosmographie*. Un volume. *Mécanique*. Un volume.
*Trigonométrie*. Un volume.

**Classe de Philosophie** :

*Cosmographie*. Un volume. *Trigonométrie-Algèbre*. Un volume.
*Mathématiques (Trigonométrie-Algèbre et Cosmographie)* en un volume.

**Classe de Sciences expérimentales** :

*Cosmographie*. Un volume.
*Mathématiques* (moins la Cosmographie). Un volume.

*CLASSIQUES HACHETTE*

ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRÉ

**Roland MAILLARD**
Inspecteur Général
de l'Instruction buplique.

**Albert MILLET**
Professeur au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'E. N. S. E. T.

# MÉCANIQUE

*CLASSE DE MATHÉMATIQUES*

**Programme du 24 Juin 1948**
**modifié par**
**l'arrêté du 27 Novembre 1956**

CLASSIQUES
HACHETTE

# PROGRAMMES OFFICIELS

## CLASSE DE MATHÉMATIQUES

### Cinématique.

I. Relativité du mouvement. Trajectoire.

Mouvement rectiligne uniforme. Vecteur-vitesse du mobile à un instant donné.

II. Définition du vecteur-vitesse moyenne entre deux instants donnés et du vecteur-vitesse à un instant donné d'un mobile animé d'un mouvement curviligne ou rectiligne.

Détermination du vecteur-vitesse à un instant donné en supposant le mouvement du mobile défini, sur une trajectoire donnée, par son équation horaire.

Vitesse angulaire dans un mouvement circulaire.

Vecteur-vitesse de la projection d'un mobile sur un plan ou sur une droite. Détermination du vecteur-vitesse à un instant donné d'un mobile dont la position à tout instant est définie par ses coordonnées dans un système d'axes.

III. Définition du vecteur-accélération, à un instant donné, d'un mobile animé d'un mouvement curviligne ou rectiligne.

Détermination de ce vecteur : 1° dans le cas d'un mouvement rectiligne; 2° dans le cas où la position du mobile est définie par ses coordonnées.

IV. Étude particulière des mouvements suivants : mouvement rectiligne uniformément varié, mouvement circulaire uniforme, mouvement rectiligne vibratoire simple.

Relation entre le mouvement rectiligne vibratoire simple et le mouvement circulaire uniforme; mouvement rectiligne défini par une équation de la forme :

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega t + \beta).$$

V. Mouvement de translation d'un corps solide; trajectoires, vecteurs-vitesse, vecteurs-accélération des divers points du corps.

Mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe; vitesse angulaire du corps.

© *Librairie Hachette, 1955.*
Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

# PRÉFACE

Le présent ouvrage est conforme au programme de la classe de Mathématiques. On trouvera, au début, une revision des propriétés essentielles de la *théorie des vecteurs libres*. Nous n'avons pas jugé utile d'introduire la notion de dérivée vectorielle, que le programme ne mentionne pas : elle nécessiterait des explications trop longues pour le profit qu'un élève de la classe de Mathématiques en retirerait.

En *cinématique*, nous nous sommes ralliés à l'ordre du programme, qui définit le vecteur-accélération dans le cas général avant d'en faire l'application au mouvement rectiligne. On en devine bien la raison : empêcher les élèves de croire que la longueur du vecteur-accélération est la dérivée, par rapport au temps, de la longueur du vecteur-vitesse. Nous voulons espérer que cette précaution suffira.

Les *mouvements particuliers* qui figurent au programme ont donné lieu, quand cela était possible, à la démonstration de propriétés caractéristiques.

***

Comme dans tous les livres de cette collection, de *nombreux exercices* sont proposés. Ils permettront au professeur de compléter l'exposé, de préciser un détail, de faire appliquer les résultats obtenus. Des énoncés de problèmes de Baccalauréat et un *Résumé-Formulaire* sont donnés en fin de volume.

***

Nous recevrons avec reconnaissance les observations que nos collègues voudront bien nous communiquer et nous les remercions par avance.

LES AUTEURS.

# MÉCANIQUE

CHAPITRE PREMIER

## VECTEURS (Revision)

- 1. *Rapport de deux vecteurs parallèles.*
- 2. *Somme vectorielle.*
- 3. *Théorèmes des projections.*
- 4. *Repérage d'un point.*

## 1 RAPPORT DE DEUX VECTEURS PARALLÈLES

Certaines propriétés des vecteurs ont été exposées dans le Cours de Géométrie (chap. I). En vue de les appliquer à l'étude de la mécanique, nous rappelons ci-dessous les définitions et les propriétés essentielles.

**1. Définitions** • *On appelle* ***axe,*** *ou droite orientée, une droite sur laquelle on a choisi un sens de parcours.*

• *On appelle* ***vecteur*** *un segment de droite supposé parcouru dans un sens déterminé. Le point de départ du mobile est l'****origine*** *du vecteur; le point d'arrêt est l'****extrémité*** *du vecteur; le sens du déplacement est le* ***sens*** *du vecteur.*

On représente un vecteur par la notation : $\overrightarrow{AB}$
A est *l'origine* et B *l'extrémité.*

Il arrive aussi que l'on désigne un vecteur par une seule lettre $\vec{V}$ s'il n'y a aucune confusion à craindre.

- *La droite portant le vecteur est le* ***support*** *du vecteur.*
- *On appelle* ***longueur*** *(ou* ***module****) d'un vecteur la longueur du segment avec une unité déterminée.*

La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se désigne par la notation : AB.

■ **2. Rapport de deux vecteurs parallèles.** — Il arrive que l'on ait à étudier simultanément des vecteurs ayant même support ou des supports parallèles.

**Définitions.** • *On dit que deux vecteurs sont* ***parallèles*** *(ou ont même direction, ou sont* ***colinéaires****) quand leurs supports sont parallèles ou confondus.*

EXEMPLES : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ des figures 1 et 2 sont colinéaires.

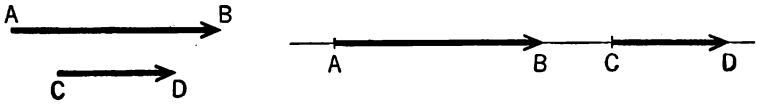



Fig. 1.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de même sens.

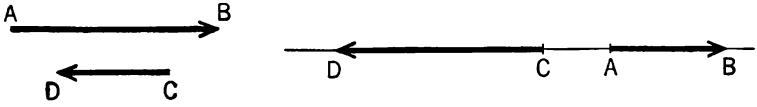



Fig. 2.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens contraires.

• *On appelle* ***rapport de deux vecteurs parallèles*** *le nombre relatif qui a pour valeur absolue le rapport des modules des deux vecteurs et qui est positif ou négatif suivant que les vecteurs sont de même sens ou de sens contraires.*

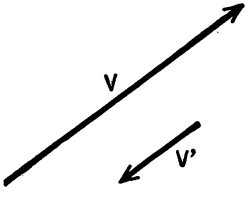



Fig. 3.

$\frac{\vec{V}}{\vec{V'}} = -3$; $\frac{\vec{V'}}{\vec{V}} = -\frac{1}{3}$.

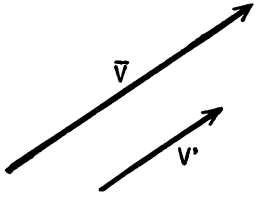



Fig. 4.

$\frac{\vec{V}}{\vec{V'}} = 2$; $\frac{\vec{V'}}{\vec{V}} = \frac{1}{2}$.

**Inversement,** on est amené à la définition suivante :

● *Le produit d'un vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *par un nombre* $k$, *positif ou négatif, est un vecteur parallèle* $\overrightarrow{A'B'}$, *de même sens ou de sens contraire suivant que* $k$ *est positif ou négatif et dont le module* $A'B'$ *est donné par la relation :* $A'B' = AB \times |k|$.

On convient d'écrire : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}.k$

ou : $\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}.$

Si $k = 0$, le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est nul.

En conséquence, les écritures équivalentes :

$$\frac{\vec{V}}{\vec{V'}} = k; \qquad \frac{\vec{V'}}{\vec{V}} = \frac{1}{k}; \qquad \vec{V} = k.\vec{V'}; \quad \vec{V'} = \frac{1}{k}.\vec{V}$$

où $k$ est un nombre relatif signifient que :

1° les supports des vecteurs sont parallèles ou confondus,

2° le rapport des longueurs des vecteurs est égal à $|k|$,

3° les vecteurs sont de même sens si $k > 0$, et de sens contraires si $k < 0$.

Si $k = -1$, les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont dits ***opposés*** et l'on écrit : $\vec{V'} = -\vec{V}$.

On démontre[1] que si $a$ et $b$ sont des nombres relatifs, on a :

$$b(a\vec{V}) = ba\vec{V} = ab\vec{V}.$$

■ **3. Vecteurs équipollents.** — Lorsque le rapport de deux vecteurs parallèles est égal à 1, on dit qu'ils sont ***équipollents.***

**Définitions.** ● *Deux vecteurs sont* ***équipollents*** *s'ils ont des supports parallèles (ou confondus), même longueur et même sens.*

Si les supports de ces vecteurs sont parallèles, les vecteurs sont les côtés opposés d'un parallélogramme (fig. 5).

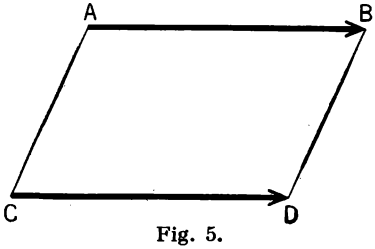


Fig. 5.

1. MAILLARD-MILLET. *Géométrie, Cl. de Math.*, p. 8.

• *Lorsqu'un vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *reste équipollent à un vecteur fixe, son origine étant arbitraire, on dit que le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *est un* **vecteur libre.**

L'équipollence des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

On dit aussi que les deux vecteurs sont *égaux.*

L'équipollence est *réciproque* (si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ on a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$) et *transitive* (deux vecteurs équipollents à un troisième sont équipollents).

■ **4. Mesure algébrique d'un vecteur.** — Lorsque plusieurs vecteurs sont parallèles, on a avantage à les comparer à l'un d'eux.

**Définitions.** • *On appelle* **vecteur unitaire d'un axe** *un vecteur libre, dont le support est l'axe ou une droite parallèle, de longueur égale à l'unité de longueur choisie et de même sens que l'axe.*

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de l'axe $x'x$ et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur parallèle à $\vec{u}$ (fig. 6).

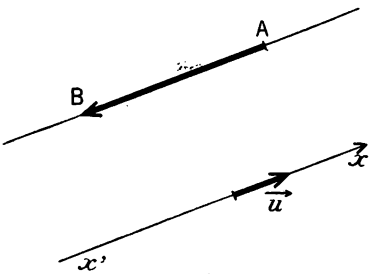


Fig. 6.

Il existe un nombre $k$ et un seul tel que l'on ait :

$$\overrightarrow{AB} = k.\vec{u}.$$

Ce nombre $k$ est dit la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

• ***La mesure algébrique d'un vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ *relative à un axe est le rapport* $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\vec{u}}$ *de ce vecteur au vecteur unitaire de l'axe.*

On désigne la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par la notation : $\overline{AB}$ (ou $\overline{V}$ s'il s'agit d'un vecteur $\vec{V}$).

Considérons deux vecteurs parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$ le vecteur unitaire d'un axe $x'x$ parallèle à leurs supports (fig. 7).

On a : $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \times \vec{u}$

$\overrightarrow{CD} = \overline{CD} \times \vec{u}.$

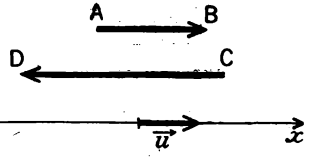



Fig. 7.

Le quotient $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ a pour valeur absolue : $\dfrac{AB}{CD}$.

Son signe est + si $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont de même signe, donc si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens.

Son signe est — si $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont de signes contraires, donc si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraires.

Le quotient $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ a donc même valeur absolue et même signe que $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$.

On a donc :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

⟶ **Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au quotient de leurs mesures algébriques évaluées avec le même vecteur unitaire.**

Le résultat est indépendant du sens choisi sur l'axe $x'x$.

■ **5. Abscisse d'un point.** — Soit un axe $x'x$ et sur cet axe un point O arbitraire que nous appellerons ***origine***.

Ayant fait choix d'une unité de longueur, construisons le vecteur unitaire $\vec{u}$ de cet axe (fig. 8).

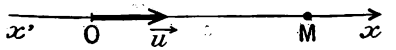



Fig. 8.

Si M est un point de l'axe, le rapport $\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\vec{u}} = \overline{OM}$ est déterminé.

**Inversement,** si on connaît $\overline{OM}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ d'origine O a une extrémité unique et bien déterminée.

**Définition.** *On appelle* ***abscisse*** *d'un point* M *sur un axe la mesure algébrique du vecteur* $\overrightarrow{OM}$, O *étant un point de l'axe appelé* ***origine.***

La connaissance de l'abscisse suppose que l'on a fixé : l'origine l'axe et le vecteur unitaire.

Rappelons la *relation de Chasles.*

**Théorème.** — Quels que soient trois points A, B, C situés sur un axe $x'x$, on a :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

On peut généraliser cette relation à plus de trois points. Considérons un quatrième point D sur l'axe.

On a : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ et : $\overline{CA} = \overline{CD} + \overline{DA}$,

donc : $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 0$,

et ainsi de suite.

■ **6. Applications.** — 1° *Mesure algébrique d'un vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ porté par un axe $x'x$ et supposons que l'on connaisse les abscisses de l'origine A et de l'extrémité B, à savoir :

$$\overline{OA} = a \qquad \text{et} \qquad \overline{OB} = b$$

où O désigne l'origine (fig. 9).

La relation de Chasles donne :

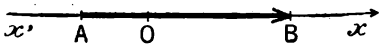



Fig. 9.

$$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO} = 0.$$

Donc :

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = b - a.$$

⟶ **La mesure algébrique d'un vecteur porté par un axe est égale à la différence entre l'abscisse de son extrémité et l'abscisse de son origine.**

2° *Milieu d'un segment.* Si I est le milieu du segment AB déterminé par les abscisses $\overline{OA} = a$ et $\overline{OB} = b$ des points A et B (fig. 10), on aura : $\overline{AI} = \overline{IB}$.

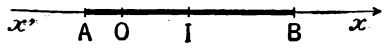



Fig. 10.

Appelons $x$ l'abscisse de I. Cette égalité s'écrit :

$$x - a = b - x,$$

d'où :

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

3° *Changement de l'origine des abscisses.* — Soit M un point de l'axe $x'x$, l'origine étant O. L'abscisse de M est $\overline{OM} = x$ (fig. 11).

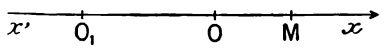



Fig. 11.

Si, le sens de l'axe et l'unité de longueur n'étant pas modifiés, l'on prend pour nouvelle origine un autre point $O_1$, l'abscisse de M devient $\overline{O_1M} = x_1$.

Posons : $\overline{OO_1} = a$.

La relation de Chasles donne :

$$\overline{O_1M} + \overline{MO} + \overline{OO_1} = 0$$

ou :

$$x_1 - x + a = 0$$

soit :

$$\boxed{x_1 = x - a.}$$

⟶ **Si l'on change l'origine des abscisses, la nouvelle abscisse est égale à l'ancienne, diminuée de l'abscisse de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne.**

## EXERCICES

**1.** — On donne les abscisses respectives $a$ et $b$ des points A et B. Quelle est l'abscisse du symétrique A′ de A par rapport à B? du symétrique B′ de B par rapport à A?

Quelle est la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$?

**2.** — Sur un axe, on a placé les points O, O′, A, A′, et on pose :

$$\overline{OO'} = d; \quad \overline{OA} = a; \quad \overline{O'A'} = a'.$$

Calculer $\overline{AA'}$.

Faire les figures avec : $d = -3$; $a = 4$; $a' = -5$

$d = -3$; $a = -5$; $a' = -2$.

**3.** — Sur un axe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives $a$ et $b$. Trouver un point M de l'axe tel que l'on ait :

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = k.$$

Applications : $a = 2$, $b = -4$, $k = \frac{1}{2}$ et $k = -\frac{1}{2}$.

## 2 SOMME VECTORIELLE

■ **7. Somme de deux vecteurs** • *Étant donné deux vecteurs libres* $\vec{V}_1$ *et* $\vec{V}_2$ *et un point* O *arbitraire, on appelle* ***somme vectorielle*** (ou ***géométrique***), *relative à* O, *de ces deux vecteurs, pris dans l'ordre énoncé, le vecteur* $\overrightarrow{OB}$ *obtenu en menant le vecteur* $\overrightarrow{OA_1}$, *d'origine* O, *équipollent au vecteur* $\vec{V}_1$ *puis le vecteur* $\overrightarrow{A_1B}$ *d'origine* $A_1$, *équipollent au vecteur* $\vec{V}_2$.

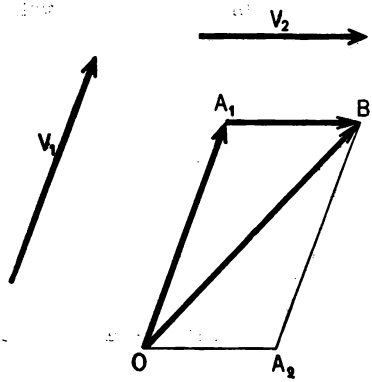


Fig. 12.

On écrit (fig. 12) :

$$\overrightarrow{OB} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2.$$

On utilise le signe opératoire +, comme pour l'addition des nombres car la somme vectorielle a les mêmes propriétés qu'une somme algébrique.

1° L'opération, toujours possible, a un résultat unique.

2° La somme d'un vecteur nul et d'un vecteur $\vec{V}$ est égal à $\vec{V}$.

3° La somme vectorielle est *commutative*.

La somme vectorielle jouit des propriétés suivantes :

⟶ La somme vectorielle ne change pas si l'on remplace l'un des vecteurs (ou les deux) par un vecteur équipollent.

⟶ Si l'on change de point O, on obtient une nouvelle somme équipollente à la première.

Il est donc inutile, pour définir la somme des vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, de préciser leur ordre et le point O utilisé pour la construction.

Si les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont opposés, leur somme est nulle.

Comme on est convenu de désigner par $-\vec{V}$ le vecteur opposé à $\vec{V}$, on a : (fig. 13)

$$\vec{V} + (-\vec{V}) = 0.$$

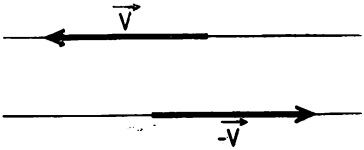


Fig. 13.

■ **8. Somme de plusieurs vecteurs** • *La* ***somme vectorielle de plusieurs vecteurs*** *:* $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ... $\vec{V}_n$, *énoncés dans cet ordre, se définit de la même manière que la somme de plusieurs nombres.*

Soit O un point quelconque. On construit la somme :

$$\overrightarrow{OS_1} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2,$$

puis la somme :

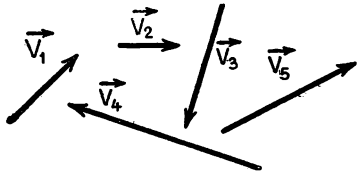
$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OS_1} + \vec{V}_3$$

et la somme :

$$\overrightarrow{OS_3} = \overrightarrow{OS_2} + \vec{V}_4$$

et ainsi de suite jusqu'à épuisement des vecteurs (fig. 14) :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OS_{n-2}} + \vec{V}_n$$



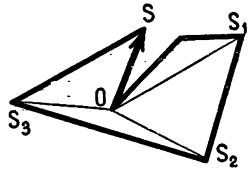



Fig. 14.

et on écrit :

$$\overrightarrow{OS} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_2 + \ldots + \vec{V}_n.$$

On démontre que la somme ainsi définie possède les propriétés suivantes :

→ 1° Elle reste équipollente à elle-même si l'on change le point O.

→ 2° Elle n'est pas modifiée si l'on remplace un vecteur quelconque $\vec{V}_k$ par un vecteur équipollent.

→ 3° L'addition vectorielle est une opération **commutative.**

→ 4° L'addition vectorielle est une opération **associative.**

• CAS PARTICULIERS. — I. La somme de trois vecteurs, non parallèles à un même plan, est la diagonale du parallélépipède dont les arêtes sont équipollentes aux trois vecteurs (fig. 15).

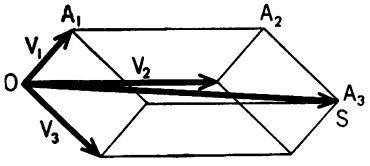



Fig. 15.

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3},$$

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA_3} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3.$$

II. Si le point S est en O, la somme vectorielle est nulle. Le contour $OS_1S_2S_3S$ est alors un *contour fermé.*

■ **9. Différence de deux vecteurs.** — Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ (fig. 16). On a :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui, ajouté au vecteur $\overrightarrow{OA}$, donne le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est dit : *différence des deux vecteurs* $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$.

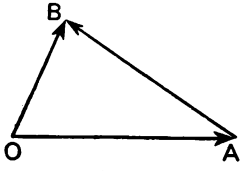



Fig. 16.

On écrit :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

■ **10. Multiplication d'une somme vectorielle par un nombre.** — Si $a$ désigne un nombre relatif, on démontre que l'on peut écrire :

$$\boxed{a(\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \ldots + \vec{V}_n) = a\vec{V}_1 + a\vec{V}_2 + \ldots + a\vec{V}_n}$$

c'est-à-dire que :

⟶ **la multiplication des vecteurs par un nombre est distributive par rapport à l'addition vectorielle.**

On démontre également que l'on peut écrire :

$$\boxed{a\vec{V} + b\vec{V} + c\vec{V} = (a + b + c)\vec{V}}$$

où $a$, $b$, $c$, désignent des nombres relatifs.

## 3 THÉORÈMES DES PROJECTIONS

■ **11. Projection sur un plan.** — Soit (P) un plan et (D) une droite non parallèle au plan (P) (fig. 17).

**Définitions.** • *On appelle* ***projection*** *d'un point* M *de l'espace sur le plan* (P), *parallèlement à la direction* (D), *la trace* M' *sur* (P) *de la parallèle à* (D) *menée par* M.

• *La droite illimitée* MM' *est appelée* ***projetante*** *de* M.

Si (D) est perpendiculaire à (P) la projection est dite *orthogonale.*

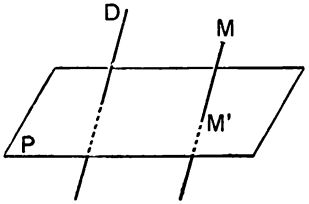



Fig. 17.

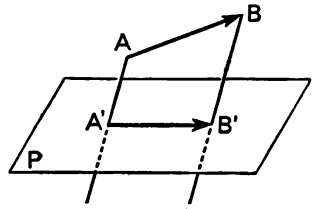



Fig. 18.

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour projection un vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ (qui peut être nul si le support de $\overrightarrow{AB}$ est parallèle à (D) ou si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul) (fig. 18).

On démontre les propositions suivantes :

⟶ Les projections d'un vecteur, parallèlement à une même direction, sur deux plans parallèles, sont des vecteurs égaux.

⟶ Les vecteurs projections de deux vecteurs équipollents sont équipollents.

⟶ Si l'on effectue la projection sur un plan, parallèlement à une droite non parallèle au plan, de plusieurs vecteurs et de leur somme, la projection du vecteur somme est la somme vectorielle des vecteurs projections des vecteurs donnés.

On montre facilement que les réciproques de ces propositions ne sont pas vraies.

Sur la figure 19 on a :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$

et : $$\overrightarrow{A'E'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'E'}.$$

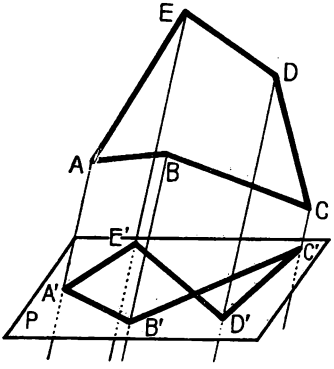



Fig. 19.

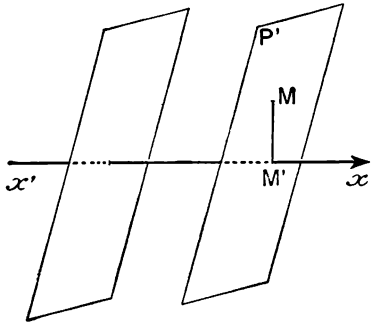



Fig. 20.

■ **12. Projection sur un axe.** — Soit $x'x$ un axe et (P) un plan non parallèle à l'axe (fig. 20).

**Définitions.** • *On appelle* ***projection*** *d'un point* M *de l'espace sur l'axe* ***x'x,*** *parallèlement au plan* (P), *la trace* M' *sur* ***x'x*** *du plan* (P'), *parallèle à* (P), *mené par* M.

• *Le plan* (P') *est appelé* ***plan projetant*** *de* M.

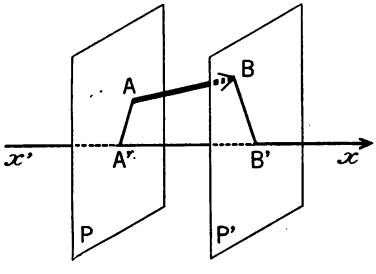



Fig. 21.

Si (P) est perpendiculaire à $x'x$, la projection est dite *orthogonale.*

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour projection sur l'axe $x'x$, le *nombre* relatif qui est la mesure $\overline{A'B'}$ du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ sur l'axe $x'x$ (fig. 21).

On écrit :

$$\overline{A'B'} = \text{proj } \overrightarrow{AB}.$$

On démontre les propositions suivantes :

⟶ Les projections sur deux axes parallèles et de même sens d'un même vecteur ou de deux vecteurs équipollents sont des nombres égaux.

Cet énoncé suppose que les deux axes ont des vecteurs unitaires équipollents.

⟶ **Le rapport des projections de deux vecteurs parallèles sur un axe est égal au rapport des deux vecteurs.**

⟶ **Si l'on effectue la projection sur un axe, parallèlement à un plan non parallèle à l'axe, de plusieurs vecteurs et de leur somme, la projection du vecteur somme est la somme algébrique des projections des vecteurs donnés.**

De la relation :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3,$$

on déduit, en projetant sur un axe $x'x$ :

$$\text{proj. } \vec{V} = \text{proj. } \vec{V}_1 + \text{proj. } \vec{V}_2 + \text{proj. } \vec{V}_3.$$

Dans le cas particulier de la projection orthogonale, on démontre le théorème suivant.

**Théorème.** — **La projection orthogonale sur un axe $x'x$ d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ repéré sur un axe $y'y$ est le produit de la mesure algébrique de ce vecteur relativement à l'axe $y'y$ par le cosinus de l'angle des deux axes $x'x$ et $y'y$.**

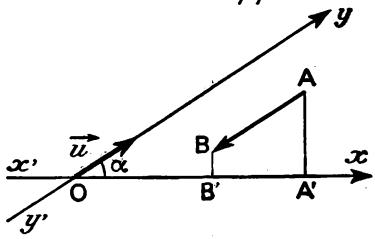



Fig. 22.

Sur la figure 22, on a : $\overrightarrow{AB} = l\,\vec{u}$

et : $\overline{A'B'} = l.\cos\alpha.$

avec : $\alpha = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}).$

## EXERCICES

**4.** — Deux vecteurs sont opposés. Que peut-on dire de leurs projections sur un axe?

**5.** — Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles. Leurs projections orthogonales sur un axe $x'x$ sont respectivement $\overline{A'B'}$ et $\overline{C'D'}$. Leurs projections orthogonales sur un autre axe $y'y$, non parallèle à $x'x$, sont respectivement $\overline{A''B''}$ et $\overline{C''D''}$.

1° Montrer que l'on a : $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{C''D''}}$.

2° Énoncer et démontrer une réciproque.

# 4 REPÉRAGE D'UN POINT

■ **13. Coordonnées cartésiennes d'un point.** — Traçons trois axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ non situés dans un même plan, concourants en leur origine commune. Ces axes forment huit trièdres de sommet O. Le trièdre correspondant aux directions positives des axes, $Oxyz$, est dit *trièdre de référence* (fig. 23).

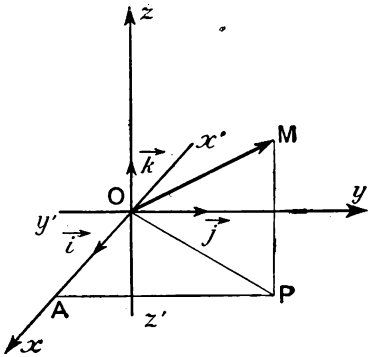


Fig. 23.

Appelons $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unitaires respectifs de ces axes. Tout point M de l'espace peut être considéré comme l'extrémité d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ d'origine O. Menons par M la parallèle à $z'oz$, elle rencontre le plan des axes $x'Ox$, $y'Oy$ en un point P (qui peut être en M ou en O).

On peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}.$$

Menons par P la parallèle à $y'Oy$, elle rencontre $x'Ox$ en un point A (qui peut être en P ou en O).

On peut écrire :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}.$$

Par suite :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{i}$ étant colinéaires, il existe un nombre $x$ (qui peut être nul) tel que :

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{PM}$ étant colinéaires respectivement avec $\vec{j}$ et $\vec{k}$, il existe des nombres $y$ et $z$ tels que :

$$\overrightarrow{AP} = y\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PM} = z\vec{k}.$$

Finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.}$$

**Réciproquement,** la donnée des nombres $x$, $y$, $z$ détermine un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et un seul de l'espace.

Le système $(x, y, z)$ est *unique* car le nombre $x$, par exemple, est la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe $x'Ox$, parallèlement au plan $yOz$.

Ces nombres $x$, $y$, $z$ sont appelés *coordonnées cartésiennes* de M par rapport au trièdre de référence :

$x$ est appelé *l'abscisse* de M ;

$y$ est appelé *l'ordonnée* de M ;

$z$ est appelé la *cote* de M.

On écrit M $(x, y, z)$ pour désigner le point M de coordonnées $x$, $y$, $z$.

Si on suppose que le trièdre de référence est trirectangle, les coordonnées sont dites *coordonnées cartésiennes rectangulaires.*

Supposons, en outre, que les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ aient même longueur et proposons-nous de mesurer OM avec la même unité de longueur.

Le triangle OAP, rectangle en A, donne :

$$\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP}^2 = x^2 + y^2.$$

Le triangle OPM, rectangle en P, donne :

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + z^2.$$

Finalement :

$$\boxed{\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2.}$$

● REMARQUE. — Si le problème à résoudre ne concerne que des points situés dans un plan, on repère ces points à deux axes du plan $x'Ox$, $y'Oy$ concourants en O. Un point M est alors défini par son abscisse $x$ et son ordonnée $y$ (fig. 24) :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Si les axes sont rectangulaires, on aura : $\overline{OM}^2 = x^2 + y^2$.

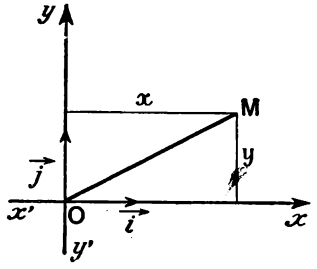



Fig. 24.

■ **14. Projections d'un vecteur libre.** — Considérons un vecteur libre $\vec{V}$ et un système d'axes $Ox$, $Oy$, $Oz$. Désignons par X, Y, Z les projections du vecteur $\vec{V}$ faites respectivement sur chaque axe, parallèlement au plan des deux autres. Soit M le point de coordonnées X, Y, Z. Au vecteur $\vec{V}$ correspond un seul point M, et un seul groupe de nombres X, Y, Z.

**Inversement,** la donnée de trois nombres X, Y, Z permet de construire le point M et tout vecteur $\vec{V}$ équipollent à $\overrightarrow{OM}$ a pour projections X, Y, Z.

Si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs unitaires des axes, on peut écrire :

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

Considérons l'un des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ équipollents à $\vec{V}$.

Désignons par : $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées de A,

et par : $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées de B.

On peut écrire (fig. 25) :

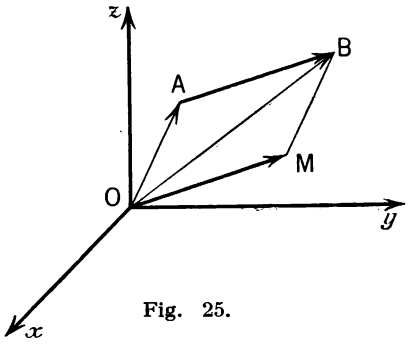



Fig. 25.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}.$$

Cette égalité vectorielle donne, en projetant sur chaque axe :

$$x_1 = x_0 + X$$
$$y_1 = y_0 + Y$$
$$z_1 = z_0 + Z$$

d'où :
$$\boxed{\begin{aligned} X &= x_1 - x_0 \\ Y &= y_1 - y_0 \\ Z &= z_1 - z_0. \end{aligned}}$$

⟶ **Les projections**[1] **d'un vecteur sont égales aux différences entre les coordonnées de même nom de son extrémité et de son origine.**

Si les axes sont rectangulaires et si les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ont même longueur, on a vu que :

$$\overline{OM}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Par suite :

$$\boxed{\overline{AB}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.}$$

1. On appelle parfois ces projections les *coordonnées* du vecteur ou les *composantes* du vecteur.

## EXERCICES SUR LE CHAPITRE PREMIER

**6.** — Déterminer la somme des 3 vecteurs ayant pour origine le centre de gravité G d'un triangle ABC et pour extrémités respectives les sommets A, B, C.

**7.** — 1° Dans un plan, on considère un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et deux directions $(\delta)$ et $(\delta')$ distinctes. Trouver un vecteur $\overrightarrow{V}$, parallèle à $(\delta)$, et un vecteur $\overrightarrow{V'}$, parallèle à $(\delta')$, tel que l'on ait :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}.$$

On dit qu'on a *décomposé* $\overrightarrow{AB}$ en deux vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ suivant les directions $(\delta)$ et $(\delta')$.

2° Décomposer un vecteur donné en 3 vecteurs portés par les arêtes d'un trièdre donné.

**8.** — Trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ont une somme nulle et l'on a :

$$\frac{OA}{5} = \frac{OB}{4} = \frac{OC}{3}.$$

Faire la figure.

**9.** — Décomposer un vecteur en deux autres sachant que ces deux vecteurs sont rectangulaires et que la longueur de l'un est double de celle de l'autre.

**10.** — Décomposer un vecteur en deux vecteurs ayant tous deux même longueur que leur somme.

**11.** — Décomposer un vecteur en trois autres sachant que les trois vecteurs sont rectangulaires deux à deux et ont même longueur.

**12.** — On donne trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$. Trouver un vecteur $\overrightarrow{OR}$ tel que l'on ait :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

**13.** — 1° Construire trois vecteurs de même longueur, de même origine et dont la somme est nulle.

2° Même question avec quatre vecteurs.

**14.** — Soit ABCD un parallélogramme de centre O et M un point quelconque de l'espace. Construire la somme des vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$ et la comparer au vecteur $\overrightarrow{MO}$.

**15.** — On dit que trois vecteurs sont *coplanaires* si leurs supports sont parallèles à un même plan. Montrer que si deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ ne sont pas colinéaires, la condition nécessaire et suffisante pour que les trois vecteurs $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$ soient coplanaires est qu'il existe des nombres $a$ et $b$ tels que l'on ait :

$$\overrightarrow{W} = a\overrightarrow{U} + b\overrightarrow{V}.$$

Les trois vecteurs $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{W}$ étant donnés, montrer que le couple de nombres $a$ et $b$ est unique.

**16.** — On considère un système d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$ dont les vecteurs unitaires sont $\vec{i}$ et $\vec{j}$. On prend sur $x'Ox$ un point A d'abscisse $a$ et sur $y'Oy$ le point B d'ordonnée $b$.

A quelles droites remarquables du triangle OAB sont parallèles les vecteurs suivants :

$$\vec{i} + \vec{j}; \qquad \vec{i} - \vec{j};$$

$$a\vec{i} + b\vec{j}; \qquad a\vec{i} - b\vec{j}?$$

**17.** — On considère un tétraèdre ABCD et les six vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$, $\vec{CD}$, $\vec{AD}$, $\vec{DB}$. Comparer leur somme géométrique et le vecteur $\vec{AG}$ d'origine A et dont l'extrémité G est le centre de gravité du triangle BCD.

**18.** — Calculer les coordonnées du milieu d'un segment connaissant les coordonnées de ses extrémités.

**19.** — On considère un système d'axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$ et un point M de leur plan. Soit $x$ et $y$ les coordonnées de M.

1° Calculer les coordonnées des symétriques de M par rapport aux bissectrices des axes.

2° Calculer les coordonnées du point M' obtenu en faisant tourner M de $+\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine O.

**20.** — Un vecteur de longueur $l$ fait des angles égaux avec les trois arêtes d'un trièdre trirectangle pris comme trièdre de référence. Calculer les composantes de ce vecteur.

**21.** — Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle de référence. Deux vecteurs unitaires $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ ont pour projections respectives :

$$\alpha, \beta, \gamma \qquad \text{et} \qquad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1.$$

1° Calculer les projections du vecteur $\vec{AB}$ et en déduire le carré $\overline{AB}^2$, de la longueur de ce vecteur.

2° En écrivant dans le triangle OAB :

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,OA \times OB \cos(\widehat{AOB})$$

en déduire que la valeur de $\cos(\widehat{AOB})$ est : $\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1$.

**22.** — On considère un cube OADBFGEC dont les arêtes OA, OB, OC sont portées respectivement par les axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ d'un trièdre trirectangle.

Soit : $$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = a > 0.$$

Les vecteurs $\vec{OC}$, $\vec{BE}$, $\vec{AF}$, $\vec{DG}$ sont équipollents.

Calculer les projections des vecteurs $\vec{OE}$, $\vec{ED}$, $\vec{AE}$, $\vec{OG}$.

CHAPITRE II

# VECTEUR-VITESSE

- **1.** *Trajectoire.*
- **2.** *Mouvement rectiligne uniforme.*
- **3.** *Cas général.*
- **4.** *Diagrammes.*

## 1 TRAJECTOIRE

■ **15. Relativité du mouvement.** — Voici une bille qui roule sur une table. La bille est en *mouvement* par rapport à la table. Sa position sur la table varie avec le temps. Les bords de la table nous servent pour repérer la position de la bille et c'est parce que nous constatons que les distances de la bille aux bords de la table sont variables que nous disons que la bille se meut par rapport à la table.

D'une manière plus abstraite, imaginons un trièdre de référence (fig. 26), trirectangle pour fixer les idées, et un point M dont les coordonnées par rapport à ce trièdre sont $x$, $y$, $z$. Deux cas sont possibles.

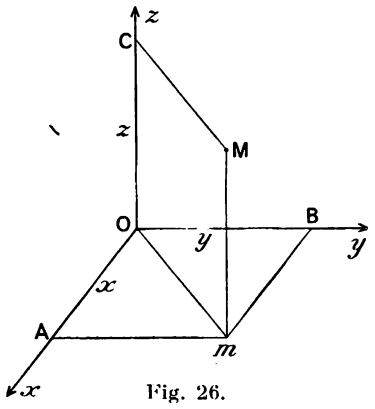


Fig. 26.

1° Ces trois coordonnées ne varient pas avec le temps. Nous dirons alors que le point M est en ***repos*** par rapport au trièdre.

2° Une, au moins, des coordonnées varie avec le temps. Le point M occupe alors, par rapport au trièdre, une position qui

varie avec le temps. Il est en ***mouvement*** par rapport au trièdre.

*Sans repère on ne peut parler de mouvement.* Si un ascenseur monte, sa distance au sol varie; l'ascenseur se meut par rapport au sol. Un poids est posé sur le plancher de l'ascenseur. Par rapport au sol ce poids est en mouvement comme l'ascenseur; mais par rapport à l'ascenseur, ce poids est fixe : il est en repos. On ne peut donc pas dire que le poids est en mouvement ou en repos, si l'on ne précise pas de quel repère on parle.

L'ascenseur, qui monte, va passer devant le bouton de l'une des portes d'un étage. Ce bouton est en repos par rapport au sol. Quand l'ascenseur passe devant lui, le bouton paraît descendre vers le plancher de l'ascenseur. En fait sa distance au plancher diminue. Le bouton, en repos par rapport au sol, est en mouvement par rapport à l'ascenseur.

La notion de mouvement est essentiellement relative à un repère choisi au préalable. Ce repère doit être indéformable quand le temps varie. Nous prendrons le plus souvent comme repère un trièdre trirectangle, figure qui possède cette propriété.

■ **16. Trajectoire.** — Soit un trièdre trirectangle $Ox$, $Oy$, $Oz$ de sommet O. Les coordonnées du point mobile M sont des fonctions du temps :

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t). \end{cases}$$

Ces trois fonctions ne sont pas simultanément des constantes, sans quoi le point serait en repos par rapport au trièdre.

Lorsque $t$ varie, le point M se déplace et décrit un lieu géométrique.

**Définition.** *La **trajectoire** d'un point mobile, par rapport à un repère, est le lieu géométrique des positions de ce point.*

Ce lieu est une courbe (C) liée au repère, c'est-à-dire une courbe dont les divers points sont fixes par rapport au repère (fig. 27).

Suivant les cas *cette trajectoire est matérialisée ou ne l'est pas.*

Si une mouche se déplace sur un fil de fer, le fil de fer constitue sa trajectoire. C'est une courbe matérielle, visible.

Si nous lançons dans l'air un grain de plomb, rien ne subsiste de sa trajectoire une fois qu'elle est décrite. Nous ne doutons pas

cependant, que par rapport à la chambre dans laquelle nous avons fait l'expérience, le grain de plomb ait décrit une courbe parfaitement déterminée. Si l'expérience est reprise la nuit avec une balle traçante, la persistance des impressions lumineuses sur la rétine peut nous révéler la trajectoire de la balle.

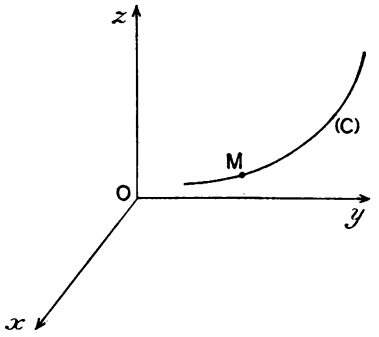



Fig. 27.

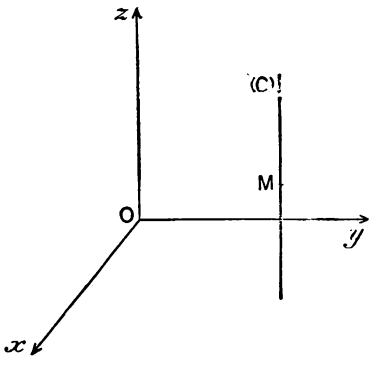



Fig. 28.

EXEMPLES. — Si deux de ces fonctions sont constantes, $x$ et $y$ par exemple, $z$ varie seul. La trajectoire est une droite parallèle à $Oz$ (fig. 28).

Si une seule de ces fonctions est constante, $z$ par exemple, la trajectoire est située dans un plan parallèle au plan $xOy$. Le mouvement est défini, dans ce plan, par les deux équations :

$$x = f(t), \qquad y = g(t).$$

Lorsque la trajectoire est une droite, on dit que le mouvement est ***rectiligne***.

Lorsque la trajectoire est une courbe, on dit que le mouvement est ***curviligne***. Si cette courbe est un cercle, on dit que le mouvement est ***circulaire***.

■ **17. Cinématique.** — Le mot cinématique vient du mot grec *kinema* qui veut dire mouvement. ***La cinématique est l'étude des mouvements en fonction du temps.***

Le repère étant choisi, un trièdre trirectangle par exemple, la position du point mobile est déterminée à un moment donné par ses trois coordonnées. La recherche de ces coordonnées exige des mesures de longueur. Il faut ensuite mesurer le temps qui s'écoule pendant l'observation. Une étude de cinématique nécessite donc le choix de l'unité de longueur et de l'unité de temps.

■ **18. Unités de longueur et de temps.** — Théoriquement ces unités sont arbitraires. Pratiquement on emploie des unités d'un usage courant.

*L'unité de longueur* est liée au mètre mais varie suivant la nature de la question. Si on étudie le mouvement d'un train rapide, l'unité de longueur pratique est le kilomètre. Si l'on étudie des mouvements de plus faible amplitude, le mètre, le centimètre ou le millimètre sont indiqués de préférence.

*L'unité de temps* est de même liée au jour solaire moyen défini en cosmographie. On utilise le jour lui-même, ou l'heure solaire moyenne, ou la minute solaire moyenne, ou la seconde solaire moyenne.

■ **19. Date.** — Pour effectuer une mesure de temps, on choisit une origine des temps. Par exemple, nous commençons une expérience aujourd'hui à 13 heures, 10 minutes, 20 secondes. Nous prenons cet instant comme origine et nous lui faisons correspondre le nombre zéro. Si à 13 heures, 10 minutes, 25 secondes nous notons un phénomène intéressant, nous dirons que ce phénomène s'est produit à l'instant de date 5 secondes, ou, par abréviation, à la date 5, en prenant la seconde comme unité de temps.

Si un événement s'est produit à 13 heures, 10 minutes, 10 secondes, sa date est — 10.

**Définitions.** • *La* ***date*** *d'un phénomène est la mesure algébrique du temps qui s'est écoulé entre l'origine des temps et la production du phénomène. Si celle-ci est postérieure à l'origine des temps la date est positive; elle est négative dans le cas contraire.*

On emploie, également, au lieu du mot *date*, les mots : ***instant*** *et* ***époque.***

• *On appelle* ***intervalle de temps*** *ou* ***durée,*** *la différence* $t_2 - t_1$ *de la date finale* $t_2$ *et de la date initiale* $t_1$.

■ **20. Changement de l'origine des temps.** — Choisissons une origine des temps et notons un phénomène A dont la date est $t_0$. Puis observons un phénomène B dont la date est $t$. Si nous prenons comme nouvelle origine des temps l'instant où s'est produit le phénomène A, la nouvelle date $t'$ du phénomène B sera :

$$t' = t - t_0.$$

Cette formule est l'analogue, pour les temps, de la formule relative au changement d'origine pour les abscisses d'un point sur un axe.

# 2 MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

**21. Équation horaire d'un mouvement rectiligne.** — Nous supposons que la trajectoire d'un point M est une droite. Cette droite constitue le repère indéformable. La position du point M, sur cette droite, sera précisée si l'on a choisi :

1° une *origine* des abscisses sur la droite;

2° une *unité de longueur*;

3° un sens *positif*; la droite est alors un *axe* orienté;

4° le nombre relatif $x$ qui mesure, avec les conventions précédentes, le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Ce nombre $x$ est l'*abscisse* de M (fig. 29).

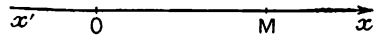


Fig. 29.

Le point M étant mobile, $x$ est un nombre variable. Il dépend de la ***date*** à laquelle nous considérons le point M. Pour désigner cette date par un nombre, on choisira :

1° une *origine des dates;*

2° une *unité de temps* (heure, minute ou seconde);

3° un sens *positif* des temps, qui est toujours celui du passé vers l'avenir. La date considérée est alors exprimée par un nombre *algébrique* $t$.

Ces conventions étant faites, à chaque valeur de $t$ correspond une valeur de $x$. L'abscisse du point M est donc une fonction de $t$.

Nous écrirons :

$$x = f(t).$$

La variable est la *date* $t$.

La fonction est l'*abscisse* $x$.

Si nous connaissons l'équation $x = f(t)$, le mouvement du point M est défini puisqu'à tout instant $t$, nous connaissons l'abscisse de M.

**Définition.** *On appelle* ***équation horaire*** *d'un mouvement rectiligne la relation :*

$$x = f(t)$$

*qui donne l'abscisse du mobile en fonction de la date correspondante.*

■ **22. Mouvement rectiligne uniforme.** — *Un mouvement rectiligne est dit* ***uniforme*** *quand son équation horaire est :*

$$x = at + b.$$

Cette équation contient deux coefficients $a$ et $b$.

1° Si l'on donne à $t$ la valeur 0, on a :

$$x = b.$$

La constante $b$ est donc l'abscisse du point mobile à l'instant *initial*, c'est-à-dire à l'instant à partir duquel on est convenu de compter $t$. En représentant cette abscisse initiale par $x_0$, on aura :

$$x = at + x_0. \qquad (2)$$

2° L'espace parcouru depuis l'instant initial jusqu'à l'instant $t$ est :

$$x - x_0 = at.$$

Il est proportionnel à $t$.

D'une façon plus générale, considérons les abscisses $x_1$ et $x_2$ aux instants $t_1$ et $t_2$.

$$x_1 = at_1 + x_0$$
$$x_2 = at_2 + x_0$$

d'où :
$$x_2 - x_1 = a(t_2 - t_1). \qquad (3)$$

$x_2 - x_1$ est la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ parcouru par le point mobile pendant l'intervalle de temps $t_2 - t_1$.

Prenons, pour fixer les idées, $t_2 > t_1$, c'est-à-dire comptons le temps dans le sens de l'avenir.

Si $a$ est *positif*, $x_2 - x_1$ est *positif;* le point se déplace dans le sens positif sur sa trajectoire (fig. 30).

Fig. 30.

Si $a$ est *négatif*, $x_2 - x_1$ est *négatif;* le point se déplace dans le sens négatif sur sa trajectoire (fig. 31).

Fig. 31.

Ainsi ***le signe de a fixe le sens du mouvement.***

3° Si $t_2 - t_1$ n'est pas nul, on peut écrire la relation (3) :

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = a.$$

Le quotient de l'espace parcouru $x_2 - x_1$ par le temps mis à le parcourir $t_2 - t_1$ est donc constant. Ce nombre algébrique s'appelle

la ***vitesse du mouvement uniforme.*** Il exprime la mesure algébrique du segment parcouru dans l'unité de temps.

Il dépend des unités de longueur et de temps choisies.

Par suite, l'équation horaire peut s'écrire :

$$\boxed{x = vt + x_0}$$

$v$ étant la vitesse et $x_0$ l'abscisse initiale.

Réciproquement, si un point M part, à l'instant $t = 0$, d'une position représentée par $M_0$, d'abscisse $x_0$, et décrit une trajectoire rectiligne de façon que la mesure algébrique $\overline{M_0M}$ du vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ parcouru dans l'intervalle de temps $(0, t)$ soit proportionnelle au temps mis à le parcourir, il occupera, à l'instant $t$, la position M, d'abscisse $x$, telle que :

$$\overline{M_0M} = vt \text{ où } v \text{ est un nombre constant,}$$

d'où : $x - x_0 = vt$

ou : $x = vt + x_0$.

**En résumé :**

⟶ L'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme est :

$$x = vt + x_0.$$

⟶ Un point mobile animé d'un mouvement uniforme se déplace dans un sens constant, qui dépend du signe de **v**.

⟶ L'espace parcouru entre les instants $t_1$ et $t_2$ est proportionnel à la durée $t_2 - t_1$.

■ **23. Unité de vitesse.** — ***L'unité de vitesse*** *est la vitesse d'un mouvement uniforme dans lequel le mobile parcourt l'unité de distance pendant l'unité de temps.*

Si on suppose : $x_2 - x_1 = 1, \quad t_2 - t_1 = 1,$

on a : $$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 1.$$

Si l'unité de longueur est le mètre, l'unité de temps la seconde, nous prendrons comme unité de vitesse le *mètre par seconde* (abréviation m/s), vitesse d'un mobile qui, animé d'un mouvement rectiligne uniforme, parcourt un mètre par seconde.

Si l'unité de longueur est le kilomètre, l'unité de temps l'heure, l'unité de vitesse est le *kilomètre par heure* (abréviation km/h).

Le changement d'unité est facile. Soit un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse est 108 km/h. Ce mobile parcourt 108 000 mètres en 3 600 secondes. Il parcourt

donc : $\frac{108\,000}{3\,600} = 30$ mètres en une seconde. Sa vitesse est donc aussi 30 m/s.

EXEMPLE. — *Évaluer une vitesse de 5 cm/s en prenant pour unités le mètre et la minute.*

Un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme de 5 cm/s parcourt 300 centimètres en une minute. Il parcourt donc 3 mètres en une minute. Sa vitesse est donc : 3 m/mn.

Le *nœud* est la vitesse d'un navire qui parcourt le mille marin (1 852 mètres) en une heure. Une vitesse de 30 nœuds correspond à une vitesse de 55,56 km/h.

• REMARQUE. — Imaginons deux mobiles qui décrivent la même droite, chacun d'un mouvement uniforme. L'unité de vitesse est, par exemple, le cm/s. La vitesse du premier est 20; la vitesse du second est — 40.

On en conclut que le premier se déplace dans le sens positif et parcourt 20 centimètres en une seconde. Le second se déplace dans le sens négatif. Il se déplace plus vite que le premier et cependant sa vitesse — 40 est inférieure à la vitesse + 20 du premier.

Nous retiendrons que la vitesse est un nombre algébrique. Son *signe* donne le sens du déplacement. Sa *valeur absolue* renseigne sur la rapidité du déplacement.

■ **24. Vecteur-vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme.** — Soit M un point animé sur une droite $x'x$ d'un mouvement rectiligne uniforme, dont l'équation horaire est :

$$x = vt + x_0.$$

On peut illustrer les propriétés du nombre $v$ en construisant

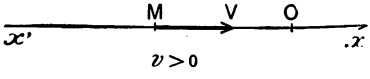



Fig. 32.

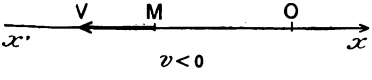



Fig. 33.

le vecteur $\overrightarrow{MV}$, d'origine M, ayant pour support la trajectoire du point M et pour mesure sur l'axe $x'x$ le nombre $v$.

**Définition.** *Étant donné un mouvement rectiligne uniforme repéré sur un axe* ***x'x****, on appelle* ***vecteur-vitesse à l'instant t du mouvement rectiligne uniforme,*** *le vecteur* $\overrightarrow{MV}$ *ayant pour origine la position* M *du mobile à l'instant* ***t****, pour support la droite trajectoire et pour mesure algébrique la vitesse* ***v****.*

On peut dire aussi que si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe $x'x$, on a :

$$\overrightarrow{MV} = v.\vec{u}.$$

Si $v > 0$, le point M se déplace dans le sens positif de l'axe et $\overrightarrow{MV}$ est dirigé dans ce même sens (fig. 32).

Si $v < 0$, le point M se déplace dans le sens négatif de l'axe et $\overrightarrow{MV}$ est aussi dirigé dans ce sens négatif (fig. 33).

⟶ **Le vecteur-vitesse est dirigé dans le sens du mouvement.**

● REMARQUE. — Il ne faut pas confondre le *vecteur-vitesse* (qui est un vecteur) et la *vitesse* (qui est un nombre). Pour éviter cette confusion on dit parfois, au lieu de vitesse, *mesure algébrique de la vitesse* ou encore *vitesse numérique.*

■ **25. Détermination de l'équation horaire.** — La formule :

$$x = at + b$$

contient deux coefficients. Il suffira, pour les déterminer, de connaître, par exemple, deux positions du point M à deux instants déterminés, ou une position et la vitesse.

EXEMPLES. — I. *Un point décrit l'axe x'Ox d'un mouvement uniforme* (fig. 34). *L'unité de longueur est le mètre, l'unité de temps la seconde. A l'instant* **1**, *l'abscisse du mobile est* **10**. *A l'instant* **5**, *son abscisse est* **— 2**. *Former l'équation horaire.*

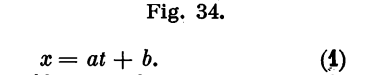


Fig. 34.

L'équation horaire est : $x = at + b.$ (1)
Pour $t = 1$ : $10 = a + b.$ (2)
Pour $t = 5$ : $-2 = 5a + b.$ (3)
On en déduit facilement : $a = -3$; $b = 13.$
L'équation horaire est : $x = -3t + 13.$
Le mobile se déplace dans le sens négatif et parcourt **3** mètres par seconde.

II. *Un point décrit l'axe x'Ox d'un mouvement uniforme* (fig. 35). *L'unité de longueur est le mètre, l'unité de temps la seconde. Il part à l'instant* **0** *de la position d'abscisse* **— 3**. *Sa vitesse est* **+ 5**. *Former l'équation horaire.*

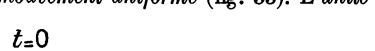


Fig. 35.

L'équation horaire est : $x = 5t - 3.$
Le mobile se déplace dans le sens positif et parcourt **5** mètres par seconde.

■ **26. Diagramme.** — L'abscisse $x$ étant une fonction linéaire du temps, on peut représenter graphiquement un mouvement uniforme par une ligne droite qui est son ***diagramme.*** Il faudra préciser les unités choisies sur les deux axes $Ot$ et $Ox$.

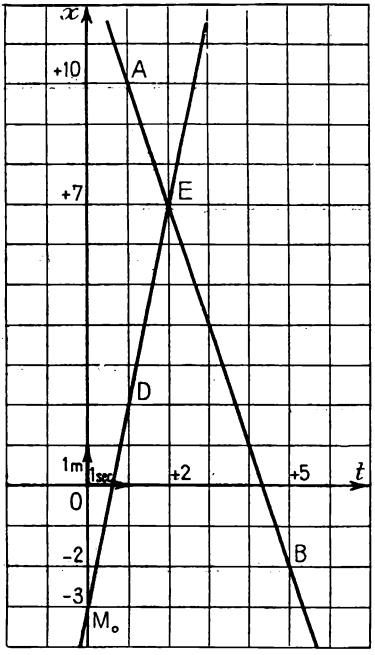



Fig. 36.

EXEMPLE. — *Tracer les diagrammes des mouvements :*

$x = -3t + 13$ et $x = 5t - 3$.

Sur un papier quadrillé, nous choisirons le côté du carré pour représenter le mètre sur $Ox$ et la seconde sur $Ot$.

Le diagramme de $x = -3t + 13$ est la droite qui joint les points A (**1**; **10**) et B (**5**; — **2**) (fig. 36).

Le diagramme de $x = 5t - 3$ est la droite qui joint les points $M_0$ (**0**; — **3**) et D (**1**; **2**).

Nous noterons que l'intersection E des deux diagrammes a pour coordonnées la date et l'abscisse du point où les deux mobiles se croisent s'ils suivent la même trajectoire. On trouve, par le calcul, et on vérifie sur le graphique les coordonnées de E : $t = 2$; $x = 7$.

## EXERCICES

**23.** — 1° Déterminer l'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme sachant que pour $t = 0$, on a : $x = +4$ et que pour $t = 12$, on a : $x = -32$.

2° Faire le diagramme.

3° Quelle serait l'équation horaire si l'on avait pris pour origine des abscisses la position du point à l'époque $t = 0$?

**24.** — Une automobile se meut sur une route droite d'un mouvement uniforme. A 11 h 30 mn, elle passe devant la borne kilométrique n° 117 de cette route; à 11 h 45 mn, elle passe devant la borne kilométrique n° 112, de la même route.

Écrire l'équation horaire du mouvement :

1° en prenant pour unités l'heure et le kilomètre, l'origine des dates à 0 h, l'origine des abscisses à la borne 100;

2° en prenant pour unités la minute et le kilomètre, l'origine des dates à 11 h 30 mn, l'origine des abscisses à la borne 117.

3° Tracer le diagramme, entre 11 h 30 mn et 11 h 45 mn.

**25.** — Montrer que, dans un mouvement rectiligne uniforme, défini par son équation horaire, la vitesse est indépendante du choix fait pour l'origine des abscisses et pour l'origine des dates si les unités de longueur et de temps sont les mêmes.

## 3 CAS GÉNÉRAL

■ **27. Abscisse curviligne.** — Soit (L) la trajectoire (fig. 37).

1° *Supposons la trajectoire non fermée.* Choisissons sur elle une origine O et un sens positif marqué par la flèche. Ces deux choix sont arbitraires mais sont faits une fois pour toutes.

Soit M un point de la courbe. Nous supposons qu'on sait mesurer la longueur de l'arc OM quel que soit M, au besoin avec un fil inextensible appliqué sur l'arc et que l'on tend ensuite suivant une ligne droite.

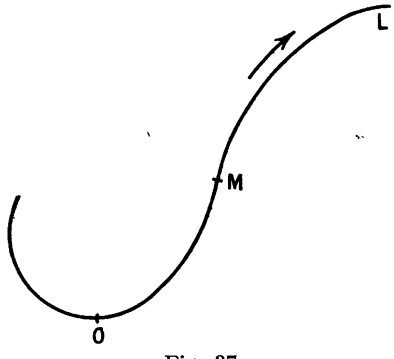


Fig. 37.

**Définition.** *On appelle* ***abscisse curviligne*** *du point* M *le nombre algébrique dont la valeur absolue est la mesure de la longueur de l'arc* OM *et qui est positif ou négatif suivant que, pour décrire l'arc* OM *de* O *vers* M *on se déplace dans le sens positif choisi ou en sens inverse.*

Un point M de la courbe (L) a ainsi une abscisse curviligne $s$ et une seule.

**Inversement,** à une abscisse curviligne compatible avec les dimensions de la trajectoire correspond un point M et un seul.

2° *Supposons que la trajectoire est une courbe fermée* (fig. 38). Choisissons, sur elle, une origine O et un sens positif marqué par une flèche. Soit M un point de cette courbe. Le point M a une infinité d'abscisses curvilignes, puisque l'on peut aller de O en M dans le sens que l'on veut et en parcourant avant de s'arrêter en M autant de circuits complets que l'on voudra.

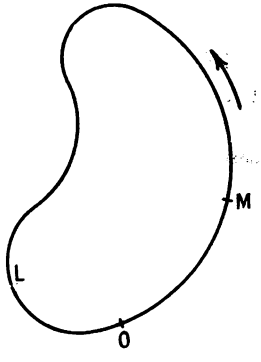


Fig. 38.

Soit $s_0$ une des abscisses curvilignes ainsi trouvées. Soit L la longueur totale du circuit. En parcourant, après être arrivé en M

autant de circuits entiers qu'on le désire, dans un sens quelconque, on revient en M. L'abscisse nouvelle $s$ est donc :

$$s = s_0 + K.L,$$

K étant un entier positif, négatif ou nul.

Nous obtenons ainsi un résultat déjà trouvé pour le cercle en trigonométrie.

Le point M a donc une infinité d'abscisses curvilignes qui diffèrent d'un multiple entier de L. Mais une abscisse curviligne *donnée* définit un point M et un seul.

■ **28. Équation horaire du mouvement.** — Supposons connue la trajectoire d'un point mobile. Elle constitue un repère indéformable. On a pris sur elle une origine O et fixé un sens positif. Si le mouvement du point est connu, on connaît l'abscisse curviligne $s$ du point mobile à un instant quelconque $t$. C'est dire que $s$ est une fonction de $t$.

On a donc :

(1) $$s = f(t).$$

Si la fonction $f(t)$ est donnée, l'équation (1) permet de calculer l'abscisse $s$ à un instant quelconque.

L'équation (1) est dite l'***équation horaire du mouvement.***

Cette équation ne détermine le mouvement qu'autant qu'on suppose connue la trajectoire et que l'origine des abscisses et le sens positif ont été choisis sur elle.

■ **29. Mouvement uniforme.** — La fonction algébrique la plus simple est la fonction linéaire. Proposons-nous d'étudier, sur une trajectoire déterminée, le mouvement défini par l'équation horaire :

$$\boxed{s = at + b.}$$

On peut présenter les mêmes calculs et les mêmes raisonnements que pour un mouvement rectiligne uniforme. Si l'on donne à $t$ la valeur 0, on a :

$$s = b.$$

La constante $b$ est l'abscisse curviligne du point mobile à l'instant *initial.*

On peut poser : $b = s_0$.

$$s = at + s_0.$$

On montre également que :

⟶ le point mobile se déplace toujours dans le même sens; ce sens dépend du signe de $a$;

⟶ l'espace parcouru entre les instants $t_1$ et $t_2$ est proportionnel à la durée $t_2 - t_1$. On dit que le mouvement est **uniforme.**

⟶ *Réciproquement*, si un point décrit une trajectoire de façon que l'accroissement d'abscisse curviligne est proportionnel à l'accroissement correspondant du temps, le mouvement est uniforme.

Le quotient constant $a = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ de l'arc $\Delta s$ parcouru pendant le temps $\Delta t$ s'appelle la ***vitesse*** du mouvement curviligne uniforme. On peut poser $a = v$.

On a alors :

$$\boxed{s = vt + s_0.}$$

**Définition.** *La vitesse, dans un mouvement curviligne* ***uniforme*** *est le nombre algébrique constant qui est le quotient de la mesure algébrique de l'arc parcouru par le temps nécessaire pour le parcourir.*

■ **30. Mouvement varié.** — *Un mouvement qui n'est pas uniforme est dit* ***varié.***

Dans l'équation horaire :

$$s = f(t)$$

d'un tel mouvement, la fonction $f(t)$ n'est pas linéaire.

Considérons un train rapide qui va de Paris à Arras en deux heures, la distance parcourue étant environ **200** km. Il est courant de dire qu'il a parcouru la distance Paris-Arras à la vitesse de **100** km/h. Ce langage est familier, s'il n'est pas très clair.

Cependant, au cours du trajet, ce train a été plus ou moins vite; il a même pu s'arrêter. On peut aussi imaginer que le train a manœuvré dans une gare et, par conséquent, qu'il a dû reculer. La notion vulgaire de vitesse ne donne aucune indication à ce sujet.

L'on ne peut donc parler de vitesse avec quelque précision que pendant une durée assez petite.

■ **31. Sens du mouvement.** — Considérons le mouvement défini par l'équation horaire :

$$s = f(t).$$

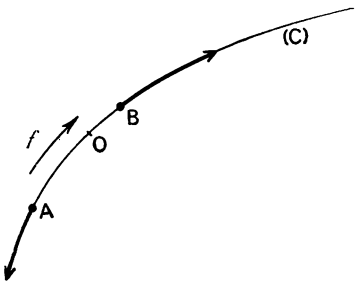



Fig. 39.

Il est intéressant de savoir dans *quel sens le mobile se déplace.* Il est entendu que les temps sont comptés du passé vers l'avenir.

Le mobile M se déplace dans le sens positif si son abscisse curviligne $s$ croît; il se déplace dans le sens contraire si son abscisse curviligne $s$ décroît. *Ce renseignement est donné par le signe de la dérivée* $f'(t)$.

EXEMPLE. — *Déterminer le sens du mouvement, aux instants* $t = 1$ et $t = 3$, *du mobile* M *dont l'équation horaire est :*

$$s = 2t^2 - 6t + 1.$$

On a : $f'(t) = 4t - 6.$

Pour $t = 1$; $f'(t) = -2$, le point se trouve à la position A définie par $\widehat{OA} = -3$ et il se dirige dans le sens négatif, c'est-à-dire dans le sens contraire de la flèche $\vec{f}$ (fig. 39).

Pour $t = 3$; $f'(t) = +6$, le point se trouve à la position B définie par $\widehat{OB} = +1$ et il se dirige dans le sens de la flèche $\vec{f}$.

■ **32. Vecteur-vitesse à un instant donné.** — Soit (C) la trajectoire d'un mobile. A l'instant $t$, le mobile est en M. A l'instant $t + \Delta t$ il est en M'. Considérons le vecteur :

$$\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t},$$

il représente le vecteur-vitesse d'un mobile fictif animé d'un mouvement uniforme qui, coïncidant avec le mobile considéré aux instants $t$ et $t + \Delta t$, décrirait, pendant la durée $\Delta t$, la corde MM'. On l'appelle *vecteur-vitesse moyenne* entre les instants $t$ et $t + \Delta t$.

Nous allons chercher si ce vecteur admet une limite quand $\Delta t$ tend vers zéro. Il nous faut, pour cela, étudier son *support*, sa *longueur* et son *sens*. Son origine M est fixe.

1° Le *support* du vecteur $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ est la corde MM' (si M et M' ne sont pas confondus). Quand $\Delta t$ tend vers zéro, M' tend vers M

et la corde MM′ a pour limite la tangente en M à la trajectoire. Nous supposons que cette tangente existe (fig. 40).

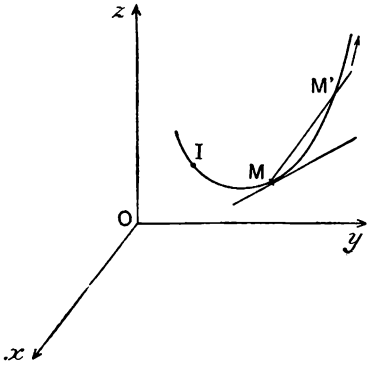



Fig. 40.

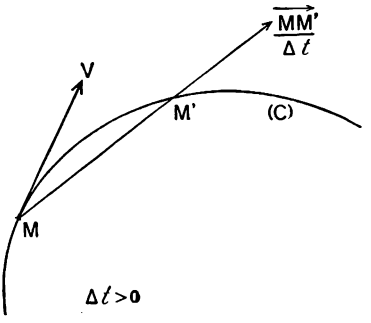



Fig. 41.

2° La *longueur* du vecteur $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ est : $l = \frac{MM'}{|\Delta t|}$.

Si $\Delta s$ est la mesure algébrique de l'arc MM′ sur la trajectoire orientée, on peut écrire :

$$l = \frac{MM'}{|\Delta s|} \times \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|.$$

Lorsque $\Delta t$ tend vers zéro, on démontre et nous admettrons que le rapport $\frac{MM'}{|\Delta s|}$ tend vers 1. Par suite la longueur $l$ a une limite qui est : $|s'(t)|$ où $s'(t)$ désigne la dérivée de l'abscisse curviligne $s$ de M par rapport à $t$.

3° Pour étudier le *sens* du vecteur, nous distinguerons deux cas suivant le signe de $\Delta t$.

Si $\Delta t$ est positif et suffisamment petit, M′ est une position postérieure à celle de M; donc le sens de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ de M vers M′ est celui du mouvement. Le vecteur $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$, obtenu en divisant $\overrightarrow{MM'}$ par le nombre positif $\Delta t$, a le sens de $\overrightarrow{MM'}$ c'est-à-dire que le vecteur-limite est un vecteur tangent en M à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement du point (fig. 41).

Si $\Delta t$ est négatif et suffisamment petit en valeur absolue, M′ est une position antérieure à celle de M; donc l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ a le

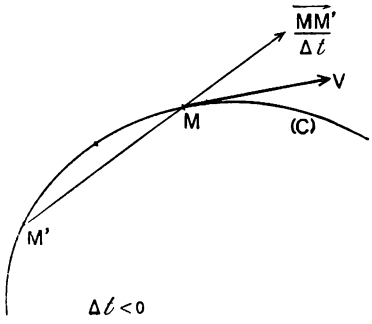


Fig. 42.

sens contraire à celui du mouvement. Le vecteur $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$, obtenu en divisant $\overrightarrow{MM'}$ par le nombre négatif $\Delta t$, a le sens de $\overrightarrow{M'M}$, c'est-à-dire que le vecteur-limite est un vecteur tangent en M à la trajectoire et dirigé, encore, dans le sens du mouvement (fig. 42).

**Définition.** *Si* M *et* M' *sont les positions d'un mobile aux instants* $t$ *et* $t + \Delta t$, *on appelle* ***vecteur-vitesse du mobile à l'instant*** $t$ *le vecteur-limite, quand* $\Delta t$ *tend vers zéro, du vecteur* $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ *ayant son origine fixe en* M.

Nous venons d'établir que cette limite existe. Nous énoncerons :

**Théorème.** — 1° Le ***vecteur-vitesse*** à l'instant $t$ est tangent à la trajectoire au point M, position du mobile à l'instant $t$.
2° Son origine est M.
3° Il a le sens du mouvement.
4° Sa longueur est la valeur absolue de la dérivée $s'(t)$ de l'abscisse curviligne $s$ du point M sur la trajectoire supposée orientée.

Lorsque le mouvement est rectiligne et uniforme, on retrouve le vecteur-vitesse défini au n° 24.

■ **33. Orientation d'une tangente à une courbe.** — Soit une courbe (C) (fig. 43) sur laquelle on a marqué un sens positif, M un point de cette courbe et T'MT la tangente en M. Supposons qu'un mobile décrive cette courbe dans le sens indiqué et arrive en M. Il peut alors, sans rebrousser chemin, suivre la demi-tangente MT. Cette demi-tangente est dite ***demi-tangente directe.***

On l'a tracée en trait plein sur la figure 43.

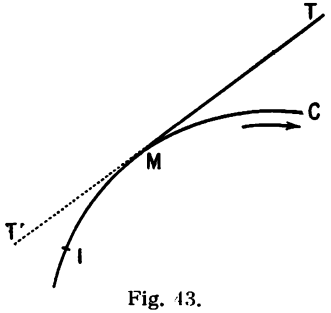


Fig. 43.

■ **34. Mesure algébrique du vecteur-vitesse.** — Considérons la trajectoire orientée; soit M la position du mobile à l'instant $t$ et $\overrightarrow{MT}$ la demi-tangente directe en M à la trajectoire. Le vecteur-vitesse est porté par cet axe. Cherchons sa mesure algébrique.

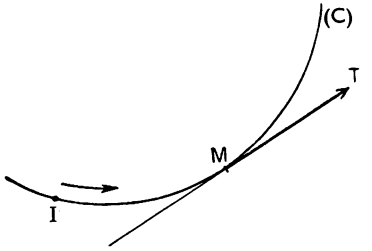


Fig. 44.

Sa mesure arithmétique est égale à $|s'(t)|$.

Trois cas sont possibles :

1° A l'instant $t$, $s'(t)$ est positif. C'est donc que $s$ croît. Par suite, le mouvement se fait dans le sens positif de la trajectoire (n° 31). Le vecteur-vitesse a, sur la tangente orientée, une mesure algébrique positive. Cette mesure est :

$$v = s'(t).$$

2° A l'instant $t$, $s'(t)$ est négatif. C'est donc que $s$ décroît. Le mouvement se fait dans le sens négatif de la trajectoire. Le vecteur-vitesse a, sur la tangente orientée, une mesure algébrique négative. Cette mesure est encore :

$$v = s'(t).$$

3° A l'instant $t$, $s'(t)$ est nul. Il en est de même du vecteur-vitesse, et la question de signe est sans intérêt.

Dans tous les cas, la mesure algébrique du vecteur-vitesse est :

$$v = s'(t).$$

**Théorème.** — Sur la demi-tangente directe, la mesure algébrique du vecteur-vitesse est la valeur de la dérivée de l'abscisse curviligne par rapport au temps, à l'instant considéré.

Cette mesure $v = s'(t)$ s'appelle la *vitesse* du mobile à l'instant $t$ et quelquefois la *vitesse numérique* à l'instant $t$.

■ **35. Mouvement accéléré ou retardé.** — Il peut être intéressant de savoir si le mobile va de plus en plus vite ou de moins en moins vite. Il faut savoir pour cela si la *valeur absolue* de la vitesse augmente ou diminue. Or la valeur absolue d'un nombre algébrique varie dans le même sens que le carré de ce nombre. On est donc amené à chercher si $v^2$ croît ou décroît.

Or la dérivée de la fonction $v^2$ est : $2vv'$.

Si on pose : $s = f(t)$,
on a : $v = f'(t)$
et : $v' = f''(t)$.

**Définitions.** • *On dit qu'un mouvement est* ***accéléré*** *pour exprimer que la valeur absolue de la vitesse augmente.* • *On dit qu'un mouvement est* ***retardé*** *pour exprimer que la valeur absolue de la vitesse diminue.*

Nous pouvons alors conclure que :

⟶ **Un mouvement est accéléré si $vv'$ est positif, un mouvement est retardé si $vv'$ est négatif.**

EXEMPLE. — *On considère le mouvement rectiligne défini par l'équation horaire : $s = t^3 - 5t + 1$. Donner à l'instant $t = 1$, la position du mobile, le sens du mouvement, la position du vecteur-vitesse et dire si le mouvement est accéléré ou retardé.*

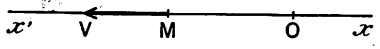



Fig. 45.

Pour $t = 1$, on a :
$s = 1 - 5 + 1 = -3$.

Le mobile est en M défini par $\overline{OM} = -3$ (fig. 45).

Sa vitesse est

$v = s' = 3t^2 - 5$. Pour $t = 1$, on a : $v = -2$.

Le point se dirige dans le sens négatif de l'axe $Ox$. Le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$ à l'instant $t = 1$ a pour mesure $-2$.

On a : $v' = 6t$ et, pour $t = 1$, $v' = 6$.

Donc, pour $t = 1$, $vv' = -2 \times 6 = -12 < 0$;
le mouvement est retardé.

■ **36. Projections du vecteur-vitesse sur les axes.** — Repérons la trajectoire (C) par rapport à un trièdre de référence $Oxyz$. Les coordonnées du point M, à l'instant $t$, sont :

$$x = f(t); \qquad y = g(t); \qquad z = h(t).$$

Celles du point M', position du mobile à l'instant $t + \Delta t$, sont :

$$x + \Delta x = f(t + \Delta t); \qquad y + \Delta y = g(t + \Delta t); \qquad z + \Delta z = h(t + \Delta t).$$

Les projections du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sur les axes sont :

$$\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$$
$$\Delta y = g(t + \Delta t) - g(t)$$
$$\Delta z = h(t + \Delta t) - h(t).$$

Les projections du vecteur $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ sur les axes sont :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}; \quad \frac{\Delta y}{\Delta t}; \quad \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Quand $\Delta t$ tend vers zéro, ces trois composantes ont pour limites les dérivées :

$$f'(t); \quad g'(t); \quad h'(t).$$

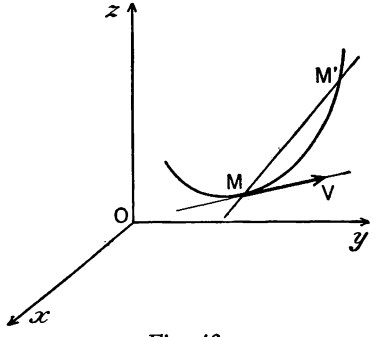



Fig. 46.

Nous énoncerons :

**Théorème.** — Les composantes du vecteur-vitesse à l'instant $t$ d'un point M de coordonnées cartésiennes $x$, $y$, $z$ sont respectivement les dérivées $x'$, $y'$, $z'$ des coordonnées $x$, $y$, $z$ par rapport au temps $t$.

On écrit : $V_x = x'$; $V_y = y'$; $V_z = z'$.

En désignant par $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unitaires des axes, on peut écrire :

$$\overrightarrow{MV} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

Si les axes sont rectangulaires, on a :

$$\boxed{v^2 = [f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2.}$$

Cette relation peut s'écrire :

$$[s'(t)]^2 = [f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2.$$

Elle permet de calculer la dérivée de la fonction $s(t)$ et, par suite, si le résultat est simple, la fonction $s(t)$ elle-même.

EXEMPLE. — *Le mouvement d'un point* M *est rapporté à deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy. *Les coordonnées sont exprimées, en fonction du temps* t, *par :*

$$x = 2\cos^2 t, \qquad y = \sin 2t.$$

*Déterminer la trajectoire et construire le vecteur-vitesse à l'instant* t. *Former une équation horaire.*

En exprimant les coordonnées $x$ et $y$ en fonction de la variable $2t$, on obtient :

$$x = 1 + \cos 2t$$
$$y = \sin 2t.$$

Soit A le point de coordonnées (1; 0).

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont :

$$X = x - 1 = \cos 2t$$
$$Y = y = \sin 2t.$$

Par suite $\overrightarrow{AM}$ a pour longueur 1 et l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AM})$ est égal à $2t$.

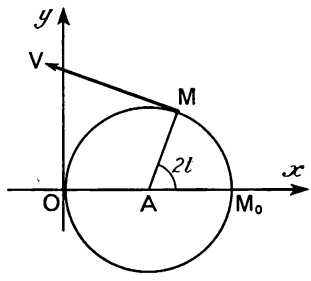


Fig. 47.

La trajectoire est le cercle (C) de centre A et de rayon 1 (fig. 47).

On a :

$$x' = -2\sin 2t; \qquad y' = 2\cos 2t.$$

Donc :

$$v^2 = x'^2 + y'^2 = 4.$$

Le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$ a donc une longueur constante et égale à 2 et en écrivant ses composantes sous la forme :

$$x' = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right); \qquad y' = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right);$$

on voit que l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MV})$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$. D'où sa construction.

Comme la longueur du vecteur-vitesse est constante, le mouvement est uniforme. Prenons pour origine des abscisses curvilignes la position $M_0$ de M à la date $t = 0$ et pour sens positif le sens du mouvement sur la trajectoire.

On a, puisque l'angle au centre qui intercepte $\widehat{M_0M}$ vaut $2t$ :

$$\widehat{M_0M} = 2t.$$

D'où l'équation horaire :

$$\boxed{s = 2t.}$$

La relation entre $s$ et $t$ est linéaire (n° 29).

■ **37. Cas d'une courbe sphérique.** — Supposons que la trajectoire (C) soit tracée sur une sphère de centre O et de rayon $r$. La tangente à la courbe (C) en un point M est alors perpendi-

culaire à OM. Par suite, le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$, s'il n'est pas nul, est perpendiculaire à OM (fig. 48).

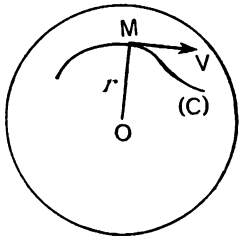



Fig. 48.

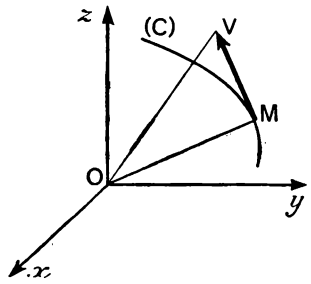



Fig. 49.

**Réciproquement**, supposons qu'un point M décrive une trajectoire (C) de telle sorte que le support du vecteur-vitesse à l'instant $t$ soit, quel que soit $t$, perpendiculaire à la droite OM joignant le point M à un point fixe O (fig. 49). Choisissons un trièdre de référence $Oxyz$, trirectangle, d'origine O. Les coordonnées du point M sont $x$, $y$, $z$. Les composantes du vecteur $\overrightarrow{MV}$ sont :

$$V_x = x'; \qquad V_y = y'; \qquad V_z = z'.$$

On a : $$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MV}.$$

Les coordonnées du point V sont donc :

$$x + x'; \qquad y + y'; \qquad z + z'.$$

Donc :

(1) $$\overline{OV}^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2.$$

Le triangle OMV, rectangle en M, donne :

(2) $$\overline{OV}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MV}^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

En égalant les deux valeurs de $\overline{OV}^2$ fournies par (1) et (2), on trouve :

(3) $$xx' + yy' + zz' = 0.$$

Posons :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On tire, en dérivant :

$$2rr' = 2(xx' + yy' + zz') = 0,$$

donc : $r' = 0$, car $r$ n'est pas nul, sinon le point M serait fixe en O.

Par suite : $r = \text{OM}$ est constant.

La courbe (C) est sphérique.

⟶ Pour que la trajectoire d'un point M soit située sur une sphère de centre O, il faut et il suffit que le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$, à l'instant $t$, soit constamment perpendiculaire à OM.

La condition est vérifiée si M décrit un cercle de centre O. Le mouvement est dit circulaire. Nous l'étudierons, en détail, au chapitre IV.

■ **38. Mouvement projeté sur un plan.** — Considérons un point M, mobile, dont la trajectoire est une courbe (C). Soit $\overrightarrow{MV}$ son vecteur-vitesse, à l'instant $t$.

Projetons M en $M_1$ sur un plan (P), parallèlement à une droite (D) (n° 11).

Le point $M_1$ décrit, en général, une courbe $(C_1)$ du plan (P) et il a, à l'instant $t$, un vecteur-vitesse $\overrightarrow{M_1V_1}$.

Nous nous proposons de comparer $\overrightarrow{MV}$ et $\overrightarrow{M_1V_1}$.

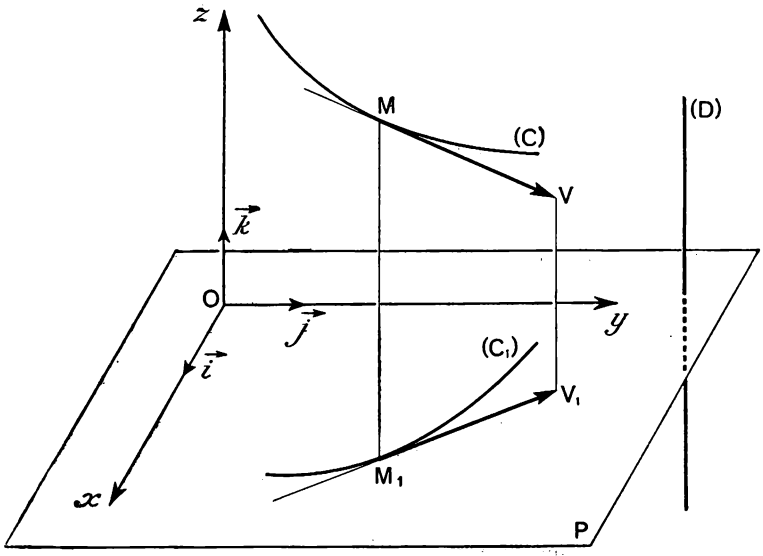



Fig. 50.

Choisissons un axe Oz, parallèle à (D). Cet axe coupe (P) en O. Traçons, dans (P), deux axes Ox et Oy. Soit $x$, $y$, $z$ les

coordonnées de M par rapport au trièdre de référence ainsi défini. Les coordonnées de $M_1$ sont : $x$, $y$, 0.

Appelons $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs-unitaires respectifs des axes. On peut écrire (fig. 50) :

$$\overrightarrow{MV} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k};$$

$$\overrightarrow{M_1V_1} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_1V} &= \overrightarrow{V_1M_1} + \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MV} \\ &= \overrightarrow{MV} - \overrightarrow{M_1V_1} + \overrightarrow{M_1M} \\ &= z'\vec{k} + z\vec{k}.\end{aligned}$$

Soit : $$\overrightarrow{V_1V} = (z' + z)\,\vec{k}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{V_1V}$ est donc nul ou parallèle à $Oz$.

Par suite, $V_1$ est la projection de V et le vecteur $\overrightarrow{M_1V_1}$ est la projection du vecteur $\overrightarrow{MV}$.

Nous énoncerons :

**Théorème.** — Si on associe à un point mobile M sa projection $M_1$ sur un plan fixe, parallèlement à une droite fixe non parallèle au plan, le vecteur-vitesse du point $M_1$, à l'instant $t$, est la projection sur le plan fixe du vecteur-vitesse du point M à l'instant $t$.

Si la trajectoire (C) est une droite parallèle à la direction des projetantes, le mobile projeté $M_1$ est au repos.

■ **39. Mouvement projeté sur un axe.** — Considérons un point mobile M, dont la trajectoire est une courbe (C). Soit $\overrightarrow{MV}$ son vecteur-vitesse à l'instant $t$. Projetons M en $M_1$ sur un axe (D), parallèlement à un plan (P) (n° 12). Le point $M_1$ a un vecteur-vitesse $\overrightarrow{M_1V_1}$, à l'instant $t$. Nous nous proposons de comparer $\overrightarrow{MV}$ et $\overrightarrow{M_1V_1}$.

Choisissons l'axe (D) pour axe $Ox$, d'origine O arbitraire. Traçons deux axes $Oy$ et $Oz$ parallèles au plan (P). Soit $x$, $y$, $z$ les coordonnées de M par rapport au trièdre de référence ainsi défini. L'abscisse de $M_1$ est : $x$.

Appelons $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs-unitaires respectifs des axes. On peut écrire (fig. 51) :

$$\overrightarrow{MV} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k};$$
$$\overrightarrow{M_1V_1} = x'\vec{i}.$$

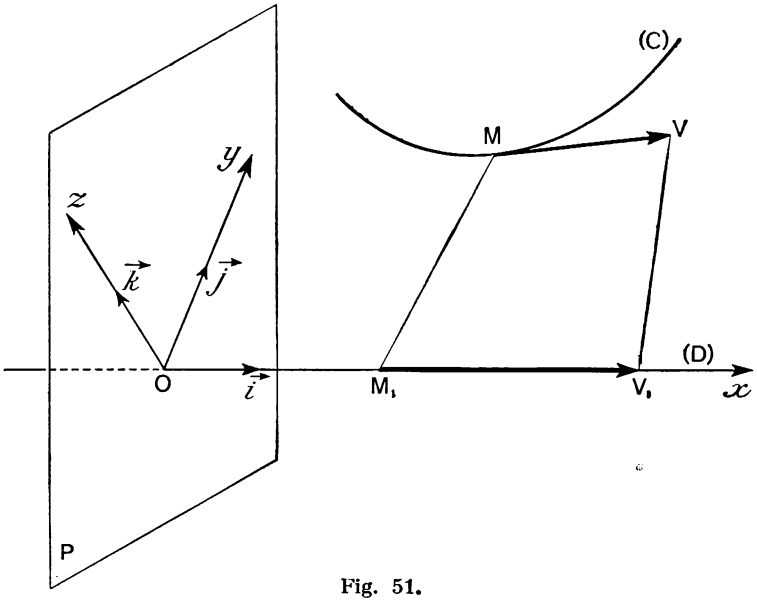



Fig. 51.

Donc :

$$\overrightarrow{V_1V} = \overrightarrow{V_1M} + \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MV}$$
$$= \overrightarrow{MV} - \overrightarrow{M_1V_1} + \overrightarrow{M_1M}.$$

Or :

$$\overrightarrow{M_1M} = y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Par suite :

$$\overrightarrow{V_1V} = (y' + y)\vec{j} + (z' + z)\vec{k}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{V_1V}$ est nul ou parallèle au plan $yOz$. Par suite $V_1$ est la projection de V et $\overline{M_1V_1}$ est la projection, sur l'axe (D), du vecteur $\overrightarrow{MV}$.

Nous énoncerons :

**Théorème.** — Si on associe à un point mobile M sa projection $M_1$ sur un axe fixe, parallèlement à un plan fixe non parallèle à l'axe, la vitesse de $M_1$, à l'instant $t$, est la projection sur l'axe fixe du vecteur-vitesse du point M, à l'instant $t$.

Si la trajectoire (C) est une ligne située dans un plan parallèle aux plans projetants, le mobile projeté $M_1$ est au repos.

## EXERCICES

**26.** — Le mouvement rectiligne d'un point est défini par l'équation horaire :

$$s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1.$$

1° Calculer la vitesse à l'instant $t$.
2° Étudier le mouvement du point lorsque $t$ croît de 0 à $+\infty$. (Dire dans quel sens se déplace le point et si le mouvement est accéléré ou retardé.)

**27.** — Mêmes questions pour :

$$s = t^3 - 3t^2 - 9t - 1.$$

**28.** — On suppose que, sur une trajectoire donnée, l'équation horaire est :

$$s = -5t^2 + 4t + 1.$$

1° Calculer la vitesse $v$.
2° Trouver une relation entre $v$ et $s$ indépendante de $t$.

**29.** — Mêmes questions avec :

$$s = \frac{1}{1-t};$$

$$s = \sqrt{2t+1}.$$

**30.** — Le mouvement d'un point M est rapporté à deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$. Les coordonnées sont exprimées, en fonction du temps $t$, par :

$$x = 10 - 3t; \qquad y = 4t - 8.$$

1° Déterminer la trajectoire.
2° Construire le vecteur-vitesse à l'instant $t$.
3° Former l'équation horaire du point M en prenant pour origine la position $M_0$ à $t = 0$ et, pour sens positif, le sens du mouvement sur la trajectoire.

**31.** — Mêmes questions avec :

$$x = \cos t - \sin t;$$
$$y = \cos t + \sin t.$$

**32.** — Le mouvement d'un point M est rapporté à deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$. Les coordonnées sont exprimées, en fonction du temps $t$, par :

$$x = \frac{p}{2}t^2; \qquad y = pt.$$

1° Déterminer la trajectoire.
2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$ à l'instant $t$.
3° En déduire les coordonnées du point V extrémité du vecteur-vitesse. Les comparer avec les coordonnées du point M à l'instant $(t + 1)$.

# 4 DIAGRAMMES

■ **40. Diagramme des espaces.** — Nous avons vu que l'étude d'un mouvement sur une trajectoire donnée se ramenait à l'étude des variations de la fonction :

$$(1) \qquad s = f(t)$$

qui constitue l'équation horaire du mouvement.

Une représentation graphique de cette fonction permet de résumer, d'une manière tangible, les variations de l'abscisse curviligne.

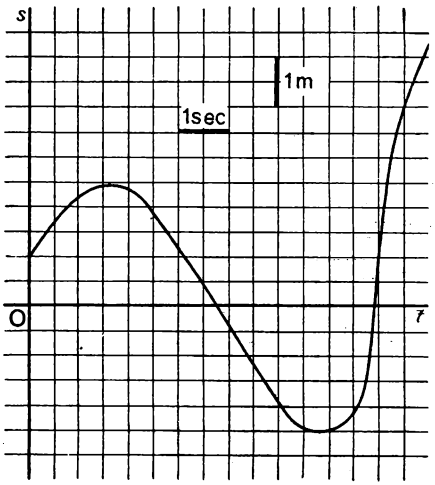



Fig. 52.

Nous prendrons deux axes de coordonnées rectangulaires $Ot$ et $Os$ (fig. 52). Sur $Ot$ nous porterons les temps. Nous entendons par là, que nous ferons choix d'une certaine longueur pour représenter l'unité de temps. Nous pourrons ainsi repérer sur l'axe $Ot$ l'instant $t = 1$, l'instant $t = 2$, etc.

Sur $Os$ nous porterons avec une unité convenable, les abscisses curvilignes $s$, ou, comme l'on dit souvent, les *espaces*.

La courbe obtenue comme représentation graphique de la fonction (1) s'appelle le ***diagramme des espaces.***

On évitera de confondre le diagramme des espaces avec la trajectoire du point.

EXEMPLE. — I. *Le diagramme des espaces d'un mouvement uniforme :*

$$s = s_0 + vt,$$

*est une droite.*

La pente de cette droite mesure la vitesse. Il est clair que, pour trouver cette pente, il faut se reporter aux deux échelles du diagramme. Il faut mettre en évidence la variation d'espace correspondant à une variation du temps. Marquons donc sur la droite deux points A et B construisons le triangle rectangle ACB dont les côtés de l'angle droit

sont parallèles aux axes. $\overline{AC}$ mesure, à l'échelle choisie pour les temps une variation du temps $\Delta t$. $\overline{CB}$ mesure, à l'échelle choisie pour les espaces, la variation correspondante $\Delta s$ de l'abscisse curviligne. La vitesse est :

$$v_0 = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Le nombre trouvé n'est pas, en général, la tangente trigonométrique de l'angle $\widehat{CAB}$.

Sur la figure 53 on s'est arrangé pour que $\Delta t = 1$ et on a trouvé $\Delta s = 3$. La vitesse est donc 3 cm/s.

Si on représente, sur le même diagramme, plusieurs mouvements uniformes, la vitesse sera d'autant plus grande que l'angle $\widehat{CAB}$ sera plus grand.

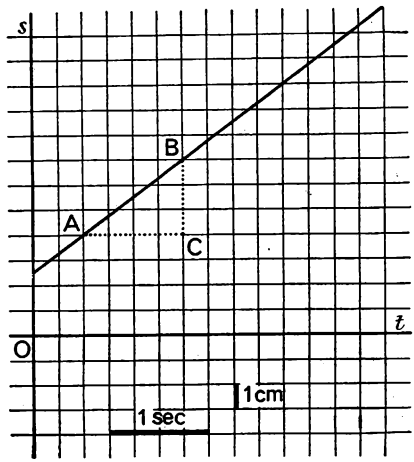



Fig. 53.

II. *Le diagramme des espaces du mouvement dont l'équation horaire est :*

$$s = at^2 + bt + c$$

(où $a$, $b$, $c$ sont des constantes) *est un arc de parabole.*

La figure 54 correspond au cas $a > 0$, $b > 0$.
La figure 55 correspond au cas $a > 0$, $b = 0$.
La figure 56 correspond au cas $a > 0$, $b < 0$.

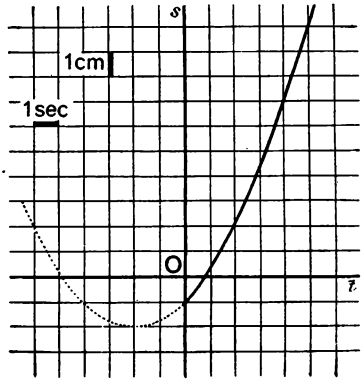



Fig. 54.

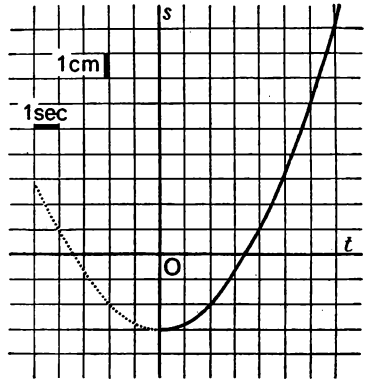



Fig. 55.

On a, sur chaque figure, dessiné en pointillé la partie du graphique qui correspond à des valeurs négatives de $t$.

La figure 56 est le diagramme du mouvement :

$$s = \frac{t^2}{8} - \frac{3t}{2} + 5.$$

Au point M ($t = 9$), la vitesse $v$ est égale à la valeur numérique de :

$$s' = \frac{t}{4} - \frac{3}{2}$$

pour $t = 9$. On trouve $v = \frac{3}{4}$.

La tangente au diagramme en résulte : on a porté MH = 4 et HT = 3 avec les échelles indiquées.

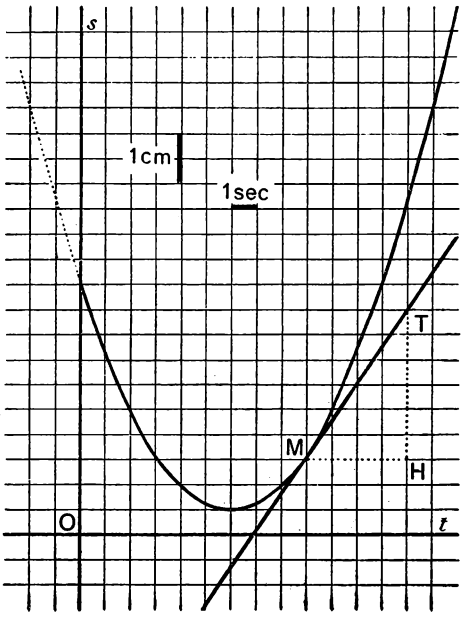



Fig. 56.

■ **41. Diagramme des vitesses.** — Il peut être commode de joindre au diagramme des espaces, représentation graphique de la fonction :

$$s = f(t),$$

le diagramme des vitesses, représentation graphique de la fonction : $v = f'(t)$.

Pour établir ce diagramme, il suffira encore de choisir une échelle pour les temps et une échelle pour les vitesses. On convient, par exemple, qu'une vitesse de 1 cm-seconde est représentée par une longueur déterminée. Le diagramme se construit alors sans difficulté.

Soit par exemple le diagramme de la figure 57.

Nous lisons que l'arc AB correspond à une vitesse négative qui décroît en valeur absolue quand le temps croît, donc cet arc correspond à un mouvement *retardé*.

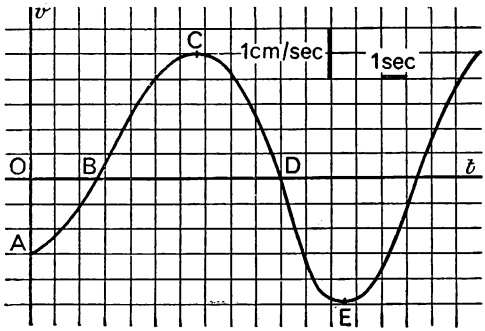



Fig. 57.

L'arc BC correspond à une vitesse positive, croissant avec le temps, donc à un mouvement *accéléré*.

L'arc CD correspond à une vitesse positive, décroissante quand le temps croît; cet arc correspond à un mouvement *retardé.*

L'arc DE correspond à une vitesse négative qui croît en valeur absolue avec le temps, donc à un mouvement *accéléré*, et ainsi de suite.

## *EXERCICES SUR LE CHAPITRE II*

**33.** — Deux localités A et B sont distantes de 60 kilomètres. A 8 heures, une automobile part de A, arrive à B à 9 h 10 mn, s'y arrête 50 mn et revient à A avec la même vitesse qu'à l'aller. A 8 h 30 mn, un cycliste part de B pour A où il arrive à 12 heures. Établir les diagrammes de ces mouvements supposés uniformes.

**34.** — Un ascenseur s'élève d'un mouvement uniforme dans une cage d'escalier qui a 28 mètres de hauteur. Il met 14 secondes pour accomplir son trajet sans arrêt. Au moment où il part, un spectateur situé sur la plateforme la plus élevée laisse tomber une bille qui croisera l'ascenseur. Cette bille tombe suivant la loi : $e = 4{,}9t^2$ ($e$ en mètres et $t$ en secondes).

1° On prend pour origine du temps l'instant où l'ascenseur démarre et pour origine O des espaces le point le plus bas de la cage d'ascenseur. On oriente la verticale $Ox$ vers le haut. Former les équations horaires de l'ascenseur et de la bille.

2° A quelle hauteur se fera le croisement de la bille et du parquet de l'ascenseur?

3° Tracer, sur les mêmes axes, les diagrammes des espaces pour les deux mouvements.

**35.** — La position d'un mobile M sur un axe fixe $y'Ay$ est définie à toute date $t$ par son abscisse $\overline{AM} = (t + 1)^2$.

La position d'un mobile M′ sur un axe fixe $z'Bz$ est définie à toute date $t$ par son abscisse $\overline{BM'} = -(t - 1)^2 + 2$.

A et B sont des points fixes, les deux axes sont parallèles et de même sens.

1° Démontrer que le point I, milieu de MM′, décrit une droite fixe avec une vitesse algébrique constante.

2° Tracer sur un même graphique les diagrammes des trois mouvements de M, de M′ et de I. Montrer que les trois diagrammes des espaces déterminent deux segments consécutifs égaux sur toute parallèle à l'un des deux axes de coordonnées qu'on demande de préciser.

**36.** — Sur l'axe $Ox$, un point M se déplace suivant la loi :

$$x = 4t + t^2.$$

Un autre point $M_1$ se déplace sur $Ox$, suivant la loi :

$$x = 2(t^2 - t) + 5.$$

1° Déterminer les instants où les mobiles se rencontrent et leurs vitesses respectives à ces instants.

2° Montrer qu'on peut trouver un troisième mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme qui rencontre aux mêmes dates les deux mobiles M et $M_1$. Calculer sa vitesse et sa position à la date $t = 0$.

**37.** — On considère deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$. Un point M décrit $Ox$ suivant la loi : $x = \dfrac{t+1}{t-1}$. On joint M au point A($x = 1$; $y = 2$). La droite AM coupe $Oy$ en M′. Étudier le mouvement de M′.

**38.** — On considère deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$. A et B sont deux points fixes de $Ox$, symétriques par rapport à O. Un point mobile M décrit $Oy$ d'un mouvement uniforme.

On posera : $\overline{OA} = -\overline{OB} = a$ et $\overline{OM} = vt + b$.

1° Former l'équation horaire du mouvement de l'orthocentre H du triangle ABM.

2° Montrer que les points M et H ont des vitesses opposées quand ils se rencontrent.

**39.** — On admettra que la chute verticale d'une pierre, dans l'air, à partir du point où on la lâche, se fait suivant l'équation horaire :

$$x = 4{,}9t^2 \quad (t \text{ en secondes, } x \text{ en mètres}).$$

Le sens positif est celui du mouvement.

1° Une pierre met 5 s pour atteindre le fond d'un puits vertical. Quelle est la profondeur du puits? (Il s'agit d'un puits sans eau.)

2° Combien de secondes la pierre mettrait-elle pour atteindre le fond d'un puits 4 fois, 9 fois, 2 fois plus profond?

3° Un puits de mine a une profondeur de 176,4 m. Calculer le temps que mettrait une pierre pour atteindre le fond du puits. Quelle serait sa vitesse à ce moment?

4° On admettra que le son parcourt 327 mètres par seconde et que sa propagation est uniforme. On lâche une pierre dans un puits; T secondes après, on entend le bruit de l'arrivée de la pierre dans l'eau du puits. Quelle est la distance qui sépare le point où la pierre a été lâchée et la surface de l'eau du puits? Application : $T = 10$ s.

**40.** — Un point M est rapporté à deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$. Il se projette sur $Ox$ en A et sur $Oy$ en B et on suppose que l'on a : $AB = l$ et que l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$ est relié au temps $t$ par la formule : $\alpha = at$ où $a$ est une constante.

1° Déterminer la trajectoire et l'équation horaire du point M (en prenant pour origine des abscisses curvilignes la position de M à $t = 0$ et pour sens positif le sens du mouvement).

2° Calculer les composantes du vecteur-vitesse à l'instant $t$ sur les axes $Ox$ et $Oy$.

3° On projette M orthogonalement en P sur AB. Calculer les coordonnées du point P et les composantes du vecteur-vitesse du point P à l'instant $t$. Vérifier que ce vecteur-vitesse est porté par AB.

**41.** — On considère deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$. Un point A décrit $Ox$ et un point B décrit $Oy$ de façon que la longueur AB reste constante.

1° Comparer le rapport des vitesses de A et de B au rapport $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$.

2° Démontrer que les projections des vitesses de A et de B sur l'axe $\overrightarrow{AB}$ sont égales.

3° Déterminer les mouvements de A et de B de façon que la somme des carrés des vitesses de A et de B soit constante.

(On pourra poser : $AB = l$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}) = \alpha$, $\alpha$ étant une fonction de $t$.)

CHAPITRE III

# VECTEUR-ACCÉLÉRATION

- **1.** *Définition du vecteur-accélération.*
- **2.** *Cas d'un mouvement rectiligne.*
- **3.** *Mouvement rectiligne uniformément varié.*
- **4.** *Résumé.*

## 1 DÉFINITION DU VECTEUR-ACCÉLÉRATION

**42. Hodographe d'un mouvement.** — Considérons un point mobile M dont les coordonnées, rapportées à un trièdre de référence $Oxyz$, sont : $x = f(t)$; $y = g(t)$; $z = h(t)$.

Soit (C) la trajectoire et $\overrightarrow{MV}$ le vecteur-vitesse à l'instant $t$ (fig. 58). Menons le vecteur $\overrightarrow{Om}$, d'origine O, équipollent au vecteur $\overrightarrow{MV}$. Quand $t$ varie, le point $m$ varie, *en général*, et décrit une courbe ($\mathcal{H}$).

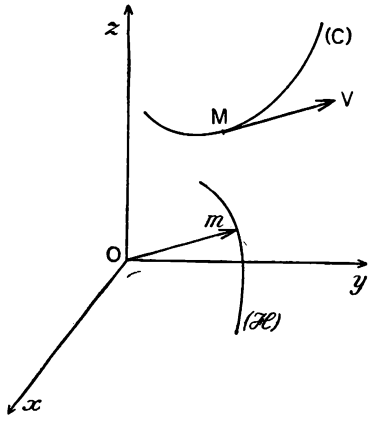



Fig. 58.

**Définition.** *On appelle* ***hodographe,*** *relatif à un point* O, *du mouvement d'un point* M, *le lieu* ($\mathcal{H}$) *de l'extrémité* $m$ *du vecteur* $\overrightarrow{Om}$, *d'origine* O, *équipollent au vecteur-vitesse* $\overrightarrow{MV}$ *du point* M *à l'instant* $t$.

Le point $m$ a pour coordonnées :

$$X = x'; \qquad Y = y'; \qquad Z = z'.$$

**EXEMPLES.** — I. Si les coordonnées de M sont :

$$x = t^2 + 1; \qquad y = 3t + 5; \qquad z = 2,$$

le point $m$ a pour coordonnées :

$$X = 2t; \qquad Y = 3; \qquad Z = 0.$$

L'hodographe ($\mathcal{H}$) est donc la droite du plan $xOy$ qui est parallèle à $Ox$ et qui coupe $Oy$ au point A d'ordonnée 3 (fig. 59).

II. Si l'on a :

$$x = 2t + 5; \qquad y = t - 3; \qquad z = -3t + 2.$$

On a :

$$X = x' = 2; \qquad Y = y' = 1; \qquad Z = z' = -3.$$

Le point $m$ est fixe. L'hodographe ($\mathcal{H}$) se réduit à un point. Ce cas particulier explique l'expression « en général » employée dans la définition de l'hodographe. Nous reviendrons sur ce cas au n° **47.**

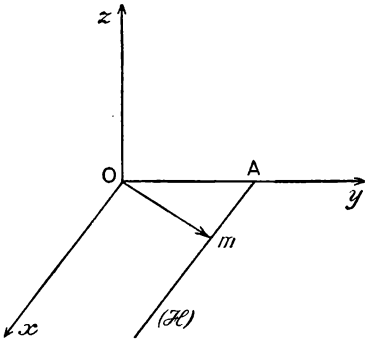



Fig. 59.

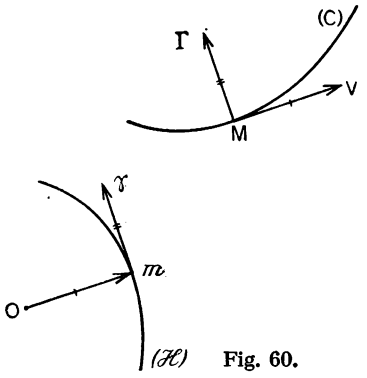



Fig. 60.

■ **43. Vecteur-accélération à un instant donné.** — Le point $m$ associé au point M, est animé d'un certain mouvement sur l'hodographe. Soit $\overrightarrow{m\gamma}$ le vecteur-vitesse de ce mouvement à l'instant $t$. Menons le vecteur $\overrightarrow{M\Gamma}$, d'origine M, équipollent à $\overrightarrow{m\gamma}$ (fig. 60).

**Définition.** *On appelle* ***vecteur-accélération*** *à l'instant* **t,** *le vecteur ayant pour origine la position du mobile à l'instant* **t** *et qui est équipollent au vecteur-vitesse du point associé sur l'hodographe au même instant.*

■ **44. Composantes du vecteur-accélération.** — En conservant les notations utilisées au n° **42** les coordonnées de $m$ sont :

$$X = f'(t); \qquad Y = g'(t); \qquad Z = h'(t).$$

Les composantes du vecteur-vitesse de ce point sont :

$$X' = f''(t); \qquad Y' = g''(t); \qquad Z' = h''(t).$$

Ces résultats supposent que l'on a utilisé l'hodographe relatif au point O. Prenons un autre point $O_1$ de coordonnées $a$, $b$, $c$. Menons $\overrightarrow{O_1m_1} = \overrightarrow{MV}$. Les coordonnées de $m_1$ sont (fig. 61) :

$$X_1 = a + X; \qquad Y_1 = b + Y; \qquad Z_1 = c + Z.$$

Les composantes du vecteur-vitesse de ce point $m_1$ sont :

$$X_1' = X' \qquad Y_1' = Y' \qquad Z_1' = Z',$$

puisque $a$, $b$, $c$ sont constantes.

Le vecteur-accélération est donc indépendant de l'hodographe choisi.

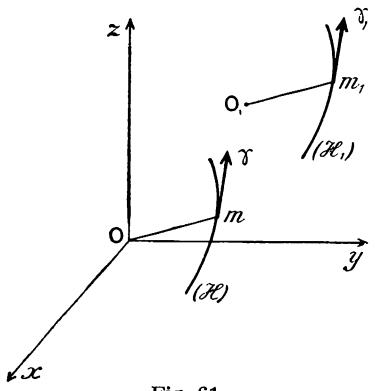


Fig. 61.

Nous énoncerons :

**Théorème. — Les composantes du vecteur-accélération à l'instant $t$ sont les dérivées secondes respectives des coordonnées du point M, par rapport à $t$.**

On écrit :

$$\gamma_x = f''(t); \qquad \gamma_y = g''(t); \qquad \gamma_z = h''(t).$$

Si les axes sont rectangulaires, la longueur $\gamma$ du vecteur-accélération est donnée par la formule :

$$\gamma^2 = [f''(t)]^2 + [g''(t)]^2 + [h''(t)]^2.$$

EXEMPLE. — *On considère, dans le plan xOy, un point* M *dont les coordonnées rectangulaires x et y sont données, en fonction du temps t par les formules :*

$$x = 2t + 1; \qquad y = t^2 - \frac{3t}{2}; \qquad t > 0.$$

*Construire la trajectoire. Calculer les composantes du vecteur-vitesse à l'instant t. Construire l'hodographe relatif au point* O. *Calculer les composantes du vecteur-accélération à l'instant t.*

On a : $$t = \frac{x-1}{2}.$$

d'où : $$y = \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{3}{4}(x-1) = \frac{(x-1)(x-4)}{4}.$$

La trajectoire est un arc de parabole dont une extrémité est $M_0$ sur $Ox$ : $\overline{OM_0} = +1$ (fig. 62).

Le vecteur-vitesse à l'instant $t$ a pour composantes :

$$v_x = x' = 2; \qquad v_y = y' = 2t - \frac{3}{2}.$$

L'hodographe relatif à O est le lieu du point $m$ de coordonnées :

$$X = 2; \quad Y = 2t - \frac{3}{2}; \quad t > 0.$$

On obtient donc une demi-droite parallèle à $Oy$ et d'origine :

$$m_0\left(2, -\frac{3}{2}\right).$$

Le vecteur-accélération à l'instant $t$ a pour composantes :

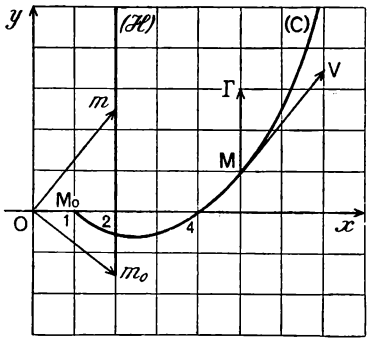



Fig. 62.

$$\gamma_x = x'' = 0;$$
$$\gamma_y = y'' = 2.$$

Le vecteur-accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ est constant, il est parallèle à $Oy$.

● CAS PARTICULIER. — Supposons qu'à un instant $t_0$, le vecteur-vitesse du point $M_0$ soit nul. L'hodographe ($\mathcal{H}$), relatif

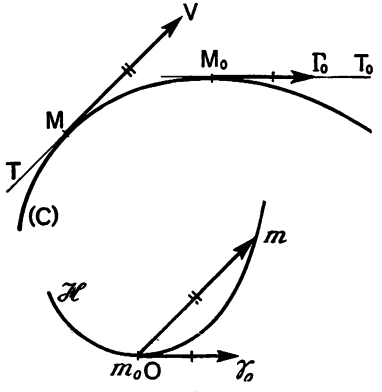



Fig. 63.

à un point O, passe alors par O. A un instant voisin $t$, le point est en M et il lui correspond, sur l'hodographe, un point $m$ voisin de O. La tangente en O à ($\mathcal{H}$) est la limite, si elle existe, de la droite $Om$ (fig. 63). Or la droite $Om$ est parallèle à la tangente MT en M à la trajectoire (C).

Lorsque $t$ tend vers $t_0$, M tend $M_0$; nous admettrons que la tangente MT tend vers la tangente $M_0T_0$ à (C) en $M_0$. Si le vecteur-accélération à l'instant $t_0$, n'est pas nul, il est parallèle à la tangente à l'hodographe en $m_0$ (qui est en O); il est donc porté par $M_0T_0$.

⟶ Lorsqu'en un point $M_0$ la vitesse est nulle, le vecteur-accélération, s'il n'est pas nul, est porté par la tangente à la trajectoire.

■ **45. Vecteur-accélération d'un mouvement curviligne uniforme.** — Supposons que M décrive sa trajectoire (C) d'un mouvement uniforme (fig. 64). La trajectoire n'étant pas rectiligne, le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$ a une direction variable. Puisque la longueur de $\overrightarrow{MV}$ est constante, l'hodographe relatif à un point O est situé sur une sphère de centre O. Par suite le vecteur-vitesse au point $m$ de l'hodographe est perpendiculaire à O$m$. Le vecteur-accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ de M est donc perpendiculaire à $\overrightarrow{MV}$. On dit qu'il est normal à la trajectoire.

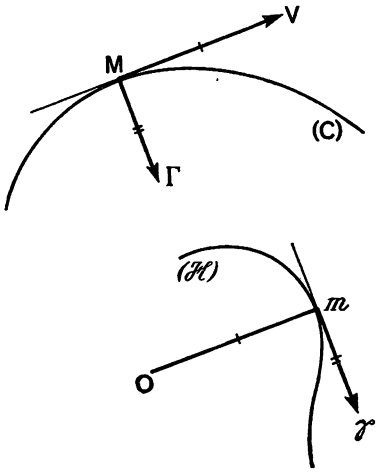



Fig. 64.

**Réciproquement,** si, quel que soit $t$, le vecteur-accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ est perpendiculaire au vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$, cela revient à dire que le vecteur-vitesse $\overrightarrow{m\gamma}$ de $m$ sur l'hodographe est perpendiculaire à O$m$. On a démontré (n° 37) que, dans ces conditions, l'hodographe est une courbe sphérique. Les vecteurs équipollents

$\overrightarrow{Om}$ et $\overrightarrow{MV}$ ont une longueur constante. Le mouvement est uniforme.

Nous énoncerons :

**Théorème.** — Pour qu'un mouvement curviligne soit uniforme, il faut et il suffit que le vecteur-accélération soit constamment normal à la trajectoire.

Il faut bien noter que dans un mouvement uniforme (et non rectiligne) le vecteur-accélération n'est pas nul quel que soit $t$. Nous déterminerons sa valeur, en particulier, dans le cas d'un mouvement circulaire (n° 61).

## EXERCICES

**42.** — Un point M est repéré dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, O$y$ par les formules :

$$x = \cos t - \sin t.$$
$$y = \cos t + \sin t.$$

Construire la trajectoire et l'hodographe relatif à O. Calculer les composantes du vecteur-accélération.

**43.** — Un point M du plan $xOy$ décrit la parabole d'équation : $y = x^2$ suivant une loi telle que la projection de M sur O$x$ ait un mouvement uniforme de vitesse $a$.

1° Exprimer la grandeur du vecteur-vitesse à l'instant $t$ en fonction de $x$.

2° Déterminer l'hodographe et le vecteur-accélération à l'instant $t$.

**44.** — On considère un point mobile M dont les coordonnées sont :

$$x = 3\cos t; \qquad y = 3\sin t; \qquad z = 4t.$$

1° Calculer les composantes du vecteur-vitesse à l'instant $t$.
Montrer que sa longueur est constante.
En déduire l'équation horaire du mouvement.

2° Construire l'hodographe relatif au point O.
Calculer les composantes du vecteur-accélération à l'instant $t$.
Évaluer la longueur de ce vecteur.

**45.** — En imitant le raisonnement fait dans le cours aux n$^{os}$ 38 et 39 préciser la relation entre le vecteur-accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ d'un point M et le vecteur-accélération de sa projection orthogonale sur un plan ou sur un axe.

**46.** — 1° On suppose que la projection d'un mobile M sur un axe, parallèlement à un plan (P), est animée d'un mouvement uniforme. Montrer que l'hodographe est une courbe plane.

2° Démontrer que, réciproquement, si l'hodographe relatif à un point O est dans un plan (Q), ne contenant pas O, la projection du mobile, parallèlement à (Q), sur tout axe, non parallèle à (Q), est animé d'un mouvement uniforme.

**47.** — Si la trajectoire d'un point M est plane, l'hodographe relatif à un point O quelconque est dans un plan passant par O. Que peut-on dire, réciproquement, d'un mouvement tel que l'hodographe relatif à un point O est dans un plan passant par O?

N. B. — On choisira le plan $xOy$ parallèle (ou confondu) avec le plan de la trajectoire ou de l'hodographe.

**48.** — Caractériser un mouvement tel que l'hodographe relatif à un point O est une droite (D) ne passant pas par O.

## 2 CAS D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE

**■ 46. Propriétés caractéristiques du vecteur-vitesse d'un mouvement rectiligne.**

1° Le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$, à l'instant $t$, est porté par la droite trajectoire. Il a donc *une direction fixe.*

**Réciproquement,** considérons un point mobile M tel que le vecteur-vitesse, à l'instant $t$, ait une direction fixe quel que soit $t$. Repérons le mouvement du point M par rapport à un trièdre de référence $Oxyz$, choisi de façon que $Ox$ soit parallèle à la direction fixe de $\overrightarrow{MV}$. Les projections de $\overrightarrow{MV}$ sur $Oy$ et sur $Oz$ sont donc nulles et on a, quel que soit $t$ :

$$y' = 0 \quad \text{et} \quad z' = 0.$$

Les coordonnées $y$ et $z$ sont donc constantes :

$$y = b; \quad z = c.$$

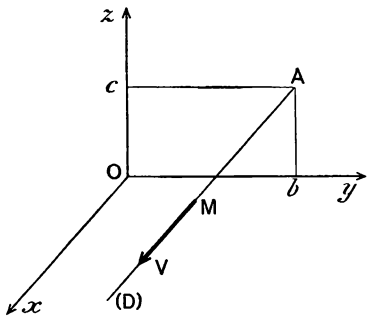


Fig. 65.

La trajectoire est donc une droite (D) parallèle à $Ox$ et perçant le plan $yOz$ au point A $(0, b, c)$ (fig. 65).

Nous énoncerons :

**Théorème I.** — Pour qu'un mouvement soit rectiligne, il faut et il suffit que le vecteur-vitesse à l'instant $t$ ait une direction fixe, quel que soit $t$. La trajectoire est parallèle à cette direction fixe.

Il revient au même de dire que l'hodographe ($\mathcal{H}$) relatif à O est une droite passant par O.

2° Le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$, à l'instant $t$, étant porté par la droite trajectoire, son support *passe par un point fixe :* n'importe quel point de la droite.

**Réciproquement,** considérons un point mobile M tel que le support du vecteur-vitesse, à l'instant $t$, passe par un point fixe O, quel que soit $t$. Repérons le mouvement du point M par rapport à un trièdre de référence $Oxyz$ choisi de façon que l'origine soit en O (fig. 66).

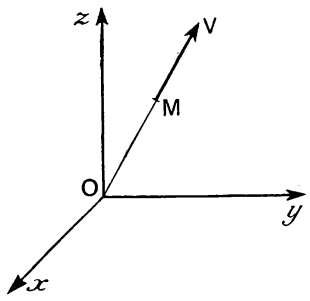


Fig. 66.

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MV}$ étant colinéaires, leurs projections sur les axes sont proportionnelles. On a donc :

$$x' = \lambda(t)x; \quad y' = \lambda(t)y; \quad z' = \lambda(t)z$$

où $\lambda(t)$ est une fonction inconnue de $t$ et où $x'$, $y'$, $z'$ désignent les dérivées de $x$, $y$, $z$ par rapport à $t$.

On peut écrire :

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}.$$

On en déduit :

$$yx' - xy' = 0. \tag{2}$$

$$yz' - zy' = 0. \tag{3}$$

La relation (2) montre que le numérateur de la dérivée de la fonction $\frac{x}{y}$ est nul. La relation (3) montre que le numérateur de la dérivée de la fonction $\frac{z}{y}$ est nul.

Si $y \neq 0$, ces dérivées sont donc nulles; les fonctions :

$$\frac{x}{y} \quad \text{et} \quad \frac{z}{y}$$

sont constantes.

On peut écrire :

$$x = ay; \qquad z = by$$

où $a$ et $b$ sont des constantes (indépendantes de $t$). La trajectoire est projetée sur le plan $xOy$ suivant une droite passant par O et distincte de $Ox$ (puisque $y \neq 0$). Elle est projetée sur le plan $yOz$ suivant une droite passant par O et distincte de $Oz$ (puisque $y \neq 0$). C'est donc que, dans l'espace, cette trajectoire est une droite passant par O.

Le raisonnement suppose que $y$ n'est pas constamment nul. Or, le point M étant mobile, ses coordonnées ne sont pas toutes les trois nulles et on ne restreint pas la généralité du raisonnement en supposant que $y$ n'est pas nul.

Nous énoncerons :

**Théorème II.** — Pour qu'un mouvement soit rectiligne, il faut et il suffit que le support du vecteur-vitesse, à l'instant $t$, passe par un point fixe. La trajectoire passe par ce point.

■ **47. Vecteur-accélération d'un mouvement rectiligne uniforme.** — Le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$, à l'instant $t$, est porté par la droite trajectoire (D) (fig. 67). Il reste équipollent à lui-même quand $t$ varie. En menant par un point O le vecteur $\overrightarrow{Om}$ équipollent à $\overrightarrow{MV}$, le point $m$ est fixe. L'hodographe ($\mathcal{H}$) se réduit à un point. Le vecteur-accélération est nul.

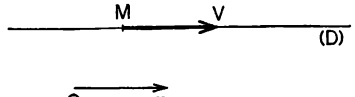


Fig. 67.

**Réciproquement,** si le vecteur-accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ est nul, le vecteur-vitesse $\overrightarrow{m\gamma}$ du point $m$ associé sur l'hodographe est nul. Le point $m$ est immobile. L'hodographe se réduit à un point. Le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$ est donc équipollent à un vecteur fixe. Sa direction est, en particulier, fixe; donc le mouvement est rectiligne (n° 46. Théorème I). De plus, la mesure algébrique du vecteur-vitesse est constante.

On peut choisir le trièdre de référence de façon que la trajectoire soit l'axe $Ox$.

Si on pose : $x = f(t)$,

on aura :

$$f'(t) = a \qquad \text{où } a \text{ désigne une constante}$$

par suite :

$$f(t) = at + b.$$

Le mouvement est *uniforme.*

Nous énoncerons :

**Théorème.** — Pour qu'un mouvement soit rectiligne et uniforme, il faut et il suffit que le vecteur-accélération soit constamment nul.

■ **48. Vecteur-accélération d'un mouvement rectiligne non uniforme.** — Considérons un point M dont la trajectoire est une droite (D). Repérons le point M par rapport à un système d'axes tel que $Ox$ soit porté par (D) (fig. 68).

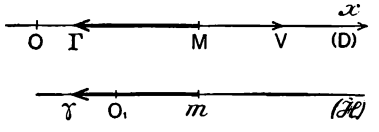


Fig. 68.

L'hodographe ($\mathcal{H}$) relatif à un point quelconque $O_1$ est une droite parallèle à (D) (ou confondue si $O_1$ est sur (D).

Le mouvement n'étant pas uniforme, le point $m$ associé à M, sur ($\mathcal{H}$) a un vecteur-vitesse, à l'instant $t$, $\overrightarrow{m\gamma}$ porté par ($\mathcal{H}$). Le vecteur-accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ est donc porté par la trajectoire (D).

Le calcul aurait d'ailleurs fourni :

$$x = f(t); \qquad y = 0; \qquad z = 0$$

d'où :

$$x'' = f''(t); \qquad y'' = 0; \qquad z'' = 0.$$

⟶ **Le vecteur-accélération d'un mouvement rectiligne est porté par la trajectoire.**

**Réciproquement,** cherchons quels sont les mouvements dans lesquels le vecteur-accélération est porté par la tangente à la trajectoire, c'est-à-dire a même support que le vecteur-vitesse.

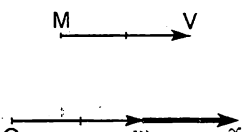


Fig. 69.

Soit $\overrightarrow{MV}$ le vecteur-vitesse à l'instant $t$, quel que soit $t$, $\overrightarrow{Om}$ le vecteur équipollent mené par O (fig. 69). Par hypothèse le vecteur-vitesse, à l'instant $t$, du point $m$ est parallèle à $\overrightarrow{MV}$, c'est donc un vecteur $\overrightarrow{m\gamma}$ porté par la droite $Om$. On remarque alors que, dans le mouvement du point $m$, le vecteur-vitesse passe par le point fixe O. On a établi (n° 46) que la trajectoire de $m$, c'est-à-dire l'hodographe de M, est une droite passant par O. Il en résulte que le vecteur $\overrightarrow{MV}$ a une direction fixe et que le mouvement de M est rectiligne (n° 46).

Nous énoncerons :

**Théorème.** — **Pour qu'un mouvement soit rectiligne, il faut et il suffit que, quel que soit $t$, le vecteur-accélération soit nul (mouvement uniforme) ou porté par la tangente à la trajectoire (mouvement non uniforme).**

Rappelons que le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$ est dirigé dans le sens du mouvement et a pour mesure $v = f'(t)$.

Or le mouvement est accéléré si l'on a (n° 35) :

$$f'(t)f''(t) > 0$$

et retardé si :

$$f'(t)f''(t) < 0.$$

⟶ **Le vecteur-accélération d'un mouvement rectiligne est dirigé dans le sens du mouvement si le mouvement est accéléré. Il est dirigé dans le sens contraire au sens du mouvement si le mouvement est retardé.**

On constate que le vecteur-accélération d'un mouvement rectiligne a une direction fixe mais la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant.

**EXEMPLE.** — *Mouvement du point* M *dont les coordonnées sont :*

$$x = t; \qquad y = t^2; \qquad z = 0.$$

La trajectoire est la parabole du plan $xOy$ dont l'équation est :

$$y = x^2.$$

Le vecteur-accélération a pour composantes :

$$x'' = 0; \qquad y'' = 2; \qquad z'' = 0.$$

Il est parallèle à $Oy$ et, cependant, le mouvement n'est pas rectiligne.

On étudiera avec profit l'exercice n° 53.

## EXERCICES

**49.** — Le mouvement rectiligne d'un point est défini par la relation :

$$x = t^3 - 2t^2 - 2t + 4.$$

Déterminer les vecteurs-vitesse et accélération à l'instant $t$.
A quelles dates le mouvement est-il accéléré ou retardé?

**50.** — Mêmes questions avec :

$$x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \qquad \text{pour} \qquad t > 0{,}1 \text{ seconde.}$$

**51.** — Deux mobiles M et $M_1$ se déplacent sur $Ox$ et leurs abscisses respectives sont données par les relations :

$$x = 2t; \qquad x_1 = t + \frac{1}{t}.$$

Déterminer les dates où les mobiles se rencontrent et trouver leurs vitesses et leurs accélérations à ces dates.

**52.** — Deux mobiles A et B se déplacent sur une droite et partent ensemble de l'origine O. Leurs abscisses $a$ et $b$ sont, à l'instant $t$ :

$$a = t^4 - t^2; \qquad b = t^3 - t^2.$$

1° Étudier la vitesse et l'accélération de chaque mobile.
2° Position de chaque mobile quand l'autre a une vitesse nulle.
3° Étudier la variation de la distance des deux mobiles.

**53.** — 1° On suppose que la direction du vecteur-accélération d'un point M est fixe. On choisira l'axe $Ox$ parallèle à cette direction. Que peut-on dire de la projection $M_1$ de M sur le plan $yOz$?

2° Qu'en déduit-on pour la trajectoire de M?

## 3 MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMÉMENT VARIÉ

■ **49. Définition.** — *On dit qu'un mouvement rectiligne est* ***uniformément varié*** *pour exprimer que son équation horaire* $x = f(t)$, *rapportée à sa trajectoire prise pour axe* $Ox$, *est un polynome du second degré :*

(1) $$x = at^2 + bt + c.$$

Nous commencerons par nous préoccuper de la signification des constantes $a$, $b$, $c$.

Pour $t = 0$, on trouve $x = c$.

$c$ est donc l'abscisse du mobile à l'instant initial.

Nous poserons : $c = x_0$.

La vitesse $v$ est donnée par :

$$v = 2at + b$$

et pour $t = 0$, on a $v = b$.

$b$ est donc la vitesse du mobile à l'instant initial.

Nous poserons : $b = v_0$.

Le vecteur-accélération a pour mesure :

$$x'' = 2a.$$

Ce vecteur reste équipollent à lui-même.

Nous poserons : $2a = \gamma$.

Nous pouvons écrire l'équation horaire sous la forme :

(2) $$\boxed{x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0.}$$

■ **50. Propriété caractéristique.** — Nous avons vu que le vecteur-accélération reste équipollent à lui-même.

**Réciproquement,** supposons que dans un mouvement rectiligne, le vecteur-accélération reste équipollent à lui-même.

On aura : $x'' = 2a$, où $a$ désigne une constante;
donc : $x' = 2at + b$, où $b$ —
et : $x = at^2 + bt + c$, où $c$ —

⟶ Pour qu'un mouvement rectiligne soit uniformément varié, il faut et il suffit que le vecteur-accélération reste équipollent à un vecteur fixe de même direction que la droite trajectoire.

Il est essentiel de préciser qu'il s'agit d'un mouvement rectiligne. La seule condition que le vecteur-accélération est équipollent à un vecteur fixe ne suffirait pas pour affirmer que le mouvement est rectiligne. (Voir l'exemple du n° 48.)

• REMARQUE. — Dans le mouvement rectiligne uniformément varié, la vitesse $v$ est une fonction linéaire du temps :

$$v = 2at + b.$$

Cette condition est caractéristique puisqu'on en déduit :

$$x = at^2 + bt + c.$$

Le nom donné au mouvement provient justement du fait que la vitesse, fonction linéaire de $t$, subit des accroissements proportionnels aux accroissements de $t$ :

$$\Delta v = 2a . \Delta t.$$

Pour des temps égaux, la variation de la vitesse est uniforme.

■ **51. Unité d'accélération.** — En écrivant l'équation horaire sous la forme :

$$(2) \qquad x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0$$

on a :

$$v = \gamma t + v_0.$$

En donnant à $\gamma$ la valeur 1, on constate que la vitesse $v$ s'accroît de l'unité de vitesse dans l'unité de temps. L'unité d'accélération dépend donc de l'unité de vitesse et de l'unité de temps.

**Définition.** *L'unité d'accélération est l'accélération d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié dont la vitesse augmente de l'unité de vitesse pendant l'unité de temps.*

Le changement d'unité est facile. Soit un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié dont la vitesse s'accroît chaque minute, de 180 mètres par minute. Cherchons par quel nombre son accélération s'exprime si l'on prend pour unités le centimètre et la seconde.

La vitesse du mobile s'accroît, chaque minute, de 180 mètres-minutes. Donc chaque seconde, elle s'accroît de 3 mètres-minutes ou encore de 300 centimètres-minutes ou enfin de $\frac{300}{60} = 5$ centimètres-secondes.

Au lieu de dire que la vitesse s'accroît de 5 centimètres à la

seconde par seconde, on dit que l'accélération est 5 centimètres-seconde par seconde et l'on écrit :

$$\gamma = 5 \text{ cm/s}^2.$$

■ **52. Étude du mouvement.** — Reprenons l'équation :

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0. \qquad (2)$$

*Nous pouvons toujours supposer que $\gamma$ est positif.* Si $\gamma$ était négatif, nous changerions le sens choisi sur la trajectoire et nous serions ramenés, en changeant $x$ de signe, au cas où $\gamma$ est positif.

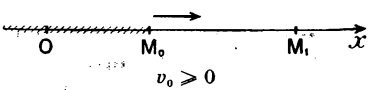
La vitesse est :

$$v = \gamma t + v_0.$$

$\gamma$ étant positif, la vitesse croît quand $t$ croît. Nous sommes amenés à distinguer deux cas suivant le signe de $v_0$.

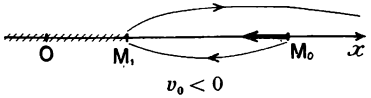
• ***Premier cas : $v_0 \geqslant 0$.*** — A l'instant initial, la vitesse est positive ou nulle. Comme elle croît, elle devient ou reste positive. L'abscisse du mobile croît. Le mouvement se fait toujours dans le même sens. La vitesse étant positive et croissante, le mouvement est accéléré.

*Le mobile se meut, toujours dans le même sens, d'un mouvement accéléré* (fig. 70).




$v_0 \geqslant 0$

Fig. 70.




$v_0 < 0$

Fig. 71.

• ***Deuxième cas : $v_0 < 0$.*** — Soit $M_0$ la position initiale du mobile (fig. 71). Au début du mouvement la vitesse est négative. Le mobile se meut donc sur la trajectoire dans le sens négatif. D'ailleurs la vitesse croît. Par suite sa valeur absolue diminue et le mouvement est *retardé*.

Il en sera ainsi jusqu'à ce que la vitesse s'annule, ce qui se produit à l'instant $t_1$ tel que l'on ait :

$$v_0 + \gamma t_1 = 0,$$

d'où :

$$t_1 = \frac{-v_0}{\gamma}.$$

Ce nombre $t_1$ est positif. A ce moment le mobile est arrivé en $M_1$. Il est facile de calculer l'abscisse de ce point. On trouve :

$$x_1 = x_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}.$$

Puis la vitesse continuant à croître, elle devient positive. Le mobile rebrousse donc chemin et se meut dans le sens positif de la trajectoire. La vitesse est positive et croissante, donc le mouvement est *accéléré.*

En résumé, le mobile est allé de $M_0$ en $M_1$ d'un mouvement retardé. Il a rebroussé chemin en $M_1$, puis s'est mû, dans le sens positif, d'un mouvement accéléré.

Nous retiendrons qu'*un mouvement uniformément varié finit toujours par être accéléré.*

Au reste, l'expression $v_\gamma$ s'écrit :

$$v_\gamma = \gamma^2 t + v_0 \gamma.$$

C'est donc une fonction linéaire et croissante; pour $t$ assez grand et positif, elle prend des valeurs positives.

*Le diagramme des espaces est une parabole* si on fait varier $t$ de $-\infty$ à $+\infty$ ou seulement des arcs de parabole si on limite la variation de $t$.

*Le diagramme des vitesses est rectiligne.*

EXEMPLE. — *Étudier le mouvement défini par l'équation horaire :*

$$x = -t^2 + 2t + 6$$

*pour* $0 < t < 4$ ($t$ en heures, $x$ en kilomètres).

Prenons le côté du quadrillage pour représenter 1 heure et aussi 1 km (fig. 72). On obtient, pour diagramme, un arc de parabole allant du point A ($t = 0$, $x = 6$) au point B ($t = 4$, $x = -2$) en passant par le sommet S ($t = 1$, $x = 7$) et par un point particulier A' ($t = 2$, $x = 6$).

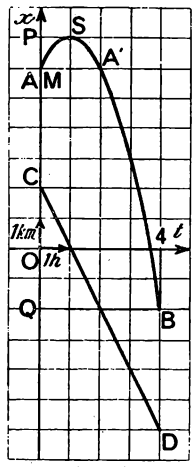


Fig. 72.

La vitesse est : $v = -2t + 2.$

On a : $v' = -2,$

donc : $vv' = 4(t - 1).$

Le point part donc de M ($x = 6$) avec une vitesse positive de 2 km/h, il arrive en P ($x = 7$) a l'instant 1 heure avec une vitesse nulle. Dans ce trajet MP ($0 < t < 1$) le mouvement est retardé ($vv' < 0$).

Puis, le mobile se dirige en sens contraire ($t > 1$), la vitesse $v$ est négative, il repasse en M ($x = 6$) à la date 2 heures avec une vitesse de $-2$ km/h et arrive en Q ($x = -2$), à la date 4 heures, avec une vitesse de $-6$ km/h. Dans cet intervalle ($1 < t < 4$) le mouvement est accéléré ($vv' > 0$).

On a construit sur le même graphique le diagramme des vitesses qui est le segment de droite CD. Il permet par une simple lecture graphique de connaître la vitesse $v$ à une date $t$.

■ **53. Détermination d'un mouvement rectiligne uniformément varié.** — L'équation horaire contient trois coefficients. Il faudra trois données pour les déterminer. Ces données peuvent être, par exemple :

3 positions du point à 3 dates données;

2 positions du point à 2 dates données et sa vitesse à une date donnée;

1 position du point à 1 date donnée, et sa vitesse à deux dates données.

EXEMPLES. — I. *Un point* M *décrit l'axe x'Ox d'un mouvement uniformément varié. Il occupe à la date* 0, *la position* $M_0(x = +1)$

*à la date* 3, *la position* $M_1(x = -2)$
*à la date* 5, *la position* $M_2(x = +6)$.

*Former l'équation horaire et étudier le mouvement de la date* 0 *jusqu'à la date* + 5. *Les unités sont la seconde et le centimètre.*

Les coefficients de l'équation horaire :

$$x = at^2 + bt + c \quad (1)$$

seront calculés à l'aide des équations :

$$1 = c \quad (2)$$
$$-2 = 9a + 3b + c \quad (3)$$
$$+6 = 25a + 5b + c \quad (4)$$

On en déduit :

$$c = 1$$
$$3a + b = -1$$
$$5a + b = 1$$

d'où : $2a = +2$; $a = +1$
et : $b = -4$.

L'équation horaire est donc :

$$x = t^2 - 4t + 1.$$

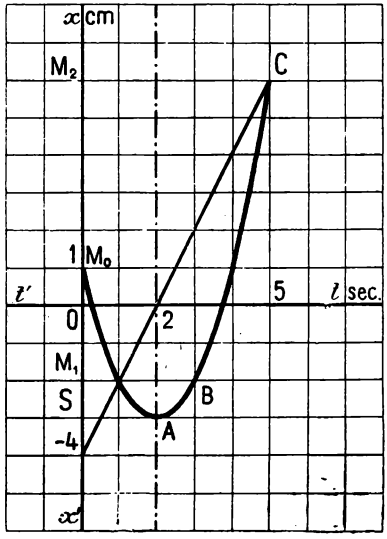


Fig. 73.

Le diagramme des espaces est la parabole associée à cette équation. Nous avons placé son axe de symétrie qui donne le sommet :

$$A(t = 2, \quad x = -3).$$

On en connaît, d'après les données, les points :

$$M_0(0, +1); \quad B(+3, -2) \quad \text{et} \quad C(+5, +6).$$

Le diagramme des vitesses :

$$v = 2t - 4$$

a été construit dans le même intervalle de temps (fig. 73).

Le point est parti de $M_0$ avec une vitesse égale à $-4$, il atteint $M_2$ avec une vitesse égale à $+6$.

Au point S, la vitesse est nulle. Le mouvement est retardé de $M_0$ à S et accéléré de S à $M_2$.

**II.** *Déterminer un mouvement uniformément varié avec les données suivantes :*

*si* $t = 0$, $x = 0$, $v = -5$ (*km, h*)
*si* $t = 4$, $v = +11$ (*km, h*).

L'équation horaire est :

$$x = at^2 + bt + c.$$

La vitesse est, à la date $t$ :

$$v = 2at + b.$$

Si $t = 0$, $0 = c$, $b = -5$.
Si $t = 4$, $11 = 8a - 5$
d'où : $a = 2$.

L'équation horaire est donc :

$$x = 2t^2 - 5t.$$

On construirait les diagrammes comme à l'EXEMPLE I.

■ **54. Relation entre l'abscisse et la vitesse.** — On peut écrire l'équation horaire sous la forme :

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2,$$

on a : $v = v_0 + \gamma t.$

Par suite : $v^2 = v_0^2 + 2v_0\gamma t + \gamma^2 t^2,$

ou : $v^2 - v_0^2 = 2v_0\gamma t + \gamma^2 t^2.$

En comparant à : $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2,$

on en déduit : $\boxed{v^2 - v_0^2 = 2\gamma(x - x_0).}$

• REMARQUES. — I. On retrouve sur cette formule que si $v = 0$, on a : $x = x_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}$ qui est l'abscisse du point $M_1$ (fig. 71).

II. A chaque valeur de $x$ atteinte par le mobile correspondent deux valeurs de $v$ et ces valeurs sont opposées. Ainsi quand le mobile prend la même abscisse, les vitesses aux deux passages sont de signes contraires mais ont la même grandeur.

■ **55. Forme réduite de l'équation horaire.** — Si l'on prend pour instant initial l'instant où la vitesse est nulle et pour origine des espaces le point où cette vitesse est nulle, les coefficients $v_0$ et $x_0$ sont nuls et l'équation horaire se réduit à :

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

La vitesse est donnée par :

$$v = \gamma t.$$

L'espace parcouru est proportionnel au carré de la durée du mouvement; la vitesse à l'instant $t$ est proportionnelle à la durée.

Entre $v$ et $x$, il existe la relation :

$$v^2 = 2\gamma x.$$

Ce mouvement est le mouvement d'un point matériel, lâché sans vitesse initiale, dans le vide. Si l'on prend pour unités le mètre et la seconde, la distance $x$ parcourue par un point matériel, lâché sans vitesse initiale, dans le vide est donnée par la formule :

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

où $g$ est égal à Paris à 9,81 m/s$^2$ environ.

On a : $v = gt$ et $v^2 = 2gx$.

## EXERCICES

▶ *Étudier les mouvements rectilignes uniformément variés suivants et tracer les diagrammes des espaces et des vitesses.*

**54.** $x = t^2 + t + 1$; $x = -2t^2 + 3t$.

**55.** $x = 2t^2 - 1$; $x = t^2 + 2t - 4$.

**56.** — Sachant que :
1° pour $t = 1$ : $x = 0$;
pour $t = 2$ : $x = -2$; $v = -3$.

**57.** — Sachant que :
2° pour $t = 1$ : $x = 1$;
pour $t = 2$ $x = 7$; $v = 8$.

**58.** — Sachant que :
pour $t = 2$ : $x = 1$; $v = 3$; $\gamma = 4$.

**59.** — Sachant que :
pour $t = 1$ : $x = 0$; $v = 2$;
pour $t = 2$ : $x = 5$.

Déterminer les dates où $\frac{x}{v} = k$ ($k$ constante donnée). Discuter.

## 4 RÉSUMÉ

■ **56. Tableaux récapitulatifs des propriétés essentielles du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération.** — On trouvera, ci-après, avec les références correspondantes, les propriétés qui ont été établies dans les deux derniers chapitres.

### I. VECTEUR-VITESSE $\overrightarrow{MV}$

| | | |
|---|---|---|
| Direction | $\overrightarrow{MV}$ est porté par la tangente en M à la trajectoire et il a le sens du mouvement. | n° 32 |
| Mesure | Sa mesure $v$ sur la demi-tangente directe à la trajectoire est égale à la dérivée $s'$ de l'abscisse curviligne $s$ par rapport au temps $t$. | n° 34 |
| Projections | Ses projections sur trois axes de coordonnées sont : $v_x = x'$ ; $v_y = y'$ ; $v_z = z'$ (dérivées, par rapport au temps $t$, des coordonnées $x, y, z$ du point M). | n° 36 |
| Propriété particulière | Pour qu'un mouvement soit rectiligne, il faut et il suffit que le vecteur vitesse ait, quel que soit $t$, une direction fixe ou que : le support du vecteur-vitesse, passe, quel que soit $t$, par un point fixe. | n° 46 |

## II. VECTEUR-ACCÉLÉRATION $\overrightarrow{M\Gamma}$

| | | |
|---|---|---|
| **Direction** | $\overrightarrow{M\Gamma}$ est équipollent au vecteur-vitesse du point associé sur l'hodographe, au même instant. | n° 43 |
| **Projections** | Les projections du vecteur-accélération sur trois axes de coordonnées sont :<br>$\gamma_x = x''$; $\gamma_y = y''$; $\gamma_z = z''$<br>(dérivées secondes de $x$, $y$, $z$ par rapport au temps). | n° 44 |
| **Propriétés particulières** | 1° Pour qu'un mouvement soit *rectiligne et uniforme*, il faut et il suffit que le vecteur-accélération soit constamment nul. | n° 47 |
| | 2° Pour qu'un mouvement soit *rectiligne*, il faut et il suffit que le vecteur-accélération soit porté par la tangente à la trajectoire, quel que soit $t$. | n° 48 |
| | 3° Pour qu'un mouvement *rectiligne* soit *accéléré*, il faut et il suffit que le vecteur-accélération soit dirigé dans le sens du mouvement. | n° 48 |
| | 4° Pour qu'un mouvement *rectiligne* soit *uniformément varié*, il faut et il suffit que le vecteur-accélération reste équipollent à un vecteur fixe de même direction que la droite trajectoire. | n° 50 |
| | 5° Pour qu'un mouvement soit *curviligne* et *uniforme*, il faut et il suffit que le vecteur-accélération soit constamment normal à la trajectoire. | n° 45 |

## EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

**60.** — Un point M, animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié, part du point O avec une vitesse nulle. Au bout d'une heure il a parcouru 10 km. Calculer l'accélération du mouvement en prenant pour unités le km et l'heure, puis en prenant le cm et la seconde.

**61.** — Un point M, mobile sur un axe $x'Ox$, est animé d'un mouvement uniformément varié. En prenant comme unité de longueur le mètre et comme unité de temps la seconde, son accélération est, à chaque instant, mesurée par le nombre 2, son abscisse initiale par — 120, sa vitesse initiale par — 2. On demande :

1° d'écrire l'équation horaire du mouvement;

2° de déterminer l'abscisse minimum de M et la date correspondante;

3° de calculer l'intervalle de temps qui s'écoule entre la date initiale et celle où M passe à l'origine.

**62.** — 1° On calcule la mesure $v$ d'une vitesse d'un mouvement rectiligne avec une certaine unité de longueur L et une certaine unité de temps T. Puis, on change d'unités et on prend pour unité de longueur $\frac{L}{a}$ et pour unité de temps $\frac{T}{b}$, $a$ et $b$ étant deux nombres donnés. Quelle est la nouvelle mesure de la vitesse considérée?

2° Même question, la grandeur mesurée étant une accélération dont la mesure dans le premier système d'unités est $\gamma$.

**63.** — Un mouvement rapporté à un trièdre trirectangle, est défini par les équations :

$$x = at + b; \qquad y = a't + b'; \qquad z = a''t + b'';$$

où $a, b, a', b', a'', b''$ sont des constantes.

Montrer que ce mouvement est rectiligne et uniforme.

**64.** — Un mouvement plan, rapporté à deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$, est défini par les équations :

$$x = at^2 + bt + c; \qquad y = a't + b'$$

où $a, b, c, a', b'$ sont des constantes.

Ce mouvement peut-il être rectiligne uniformément varié?

**65.** — Deux mobiles A et B partent en même temps d'un point O; ils se déplacent sur la droite $Ox$ illimitée dans les deux sens. Leurs abscisses $x_1$ et $x_2$ à l'instant $t$ sont données, respectivement, par les formules :

$$x_1 = t^3 - t, \qquad x_2 = t^2 - t^3.$$

On demande :

1° l'expression de la vitesse et de l'accélération de chacun des mobiles au temps $t$;

2° les dates auxquelles s'arrêtent le mobile A et le mobile B;

3° la date à laquelle les mobiles se rencontrent de nouveau;

4° leur distance maxima avant cette rencontre.

**66.** — Le mouvement rectiligne d'un point est défini par l'équation horaire :

$$x = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1.$$

1° Calculer la vitesse et l'accélération à l'instant $t$.

2° Tracer les diagrammes des espaces et des vitesses.

**67.** — Un point décrit l'axe $x'Ox$ suivant l'équation horaire :

$$x = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 4\lambda t + 1.$$

où $\lambda$ désigne un paramètre.

1° Déterminer l'accélération à l'instant $t$. Étudier ses variations lorsque $t$ varie.

2° Construire le diagramme des vitesses pour les différentes valeurs de $\lambda$. Pour combien de valeurs de $t$, la vitesse $v$ acquière-t-elle une valeur donnée, en particulier, la valeur zéro?

**68.** — Un point A décrit l'axe $x'Ox$ suivant l'équation horaire :

$$x = 2t^3 - 6t^2 + 4t.$$

1° Tracer le diagramme des espaces.

2° Un second mobile B décrit le même axe suivant l'équation horaire

$$x = t^4 - 16t^2.$$

Calculer l'accélération de B à la date où le mouvement change de sens.

3° Les deux mobiles A et B se rencontrent-ils?

**69.** — Un point mobile M décrit un axe $x'x$, partant de l'origine O à la date $t = 0$. Son mouvement est défini de la façon suivante :

Pour $0 \leqslant t < 1$ sa vitesse est constante et égale à $v$;

Pour $1 \leqslant t < 2$ sa vitesse est égale et constante à $2v$;

. . . . . .

Pour $n \leqslant t < n + 1$ sa vitesse est constante et égale à $(n + 1)\,v$, $n$ désignant un nombre entier positif.

1° Construire les diagrammes des espaces et des vitesses de ce mouvement et calculer l'abscisse $x$ de M à la date $t = n$.

2° Un mobile N décrit $x'x$ d'un mouvement uniformément varié. Déterminer ce mouvement de manière que les points M et N coïncident aux dates : $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$.

Y a-t-il également coïncidence à la date $t = n$?

3° Calculer, en fonction de $t$, la distance MN entre les dates $t = n$ et $t = n + 1$. Trouver le maximum de cette distance lorsque $n = 10$.

**70.** — On suppose qu'un point M décrit l'axe $x'Ox$ de façon qu'entre le carré $v^2$ de sa vitesse et son abscisse $x$ il existe la relation :

$$v^2 = Ax + B, \tag{1}$$

où A et B sont des constantes.

Calculer les dérivées, par rapport au temps $t$, des deux membres de la relation (1). Qu'en déduit-on pour l'accélération $\gamma$? Que peut-on dire du mouvement?

**71.** — Un point M décrit un axe $Ox$ et un point M′ décrit un axe $\omega y$ parallèle et de même sens. On sait que leurs mouvements sont uniformément variés.

1° Étudier le mouvement du milieu I de MM′. Montrer qu'il existe une relation simple entre les vitesses des trois points M, M′ et I.

2° On suppose que le point M et le point M′ rebroussent chemin à la même date. Est-il possible que le point I rebrousse chemin à la même date?

3° Dans le cas où $\overline{OM} = t^2 + 2t + 1$ et $\overline{\omega M'} = -t^2 + 2t + c$, déterminent la constante $c$ pour que le quadrilatère OMM′ω soit un parallélogramme, une fois et une seule, à une date $t = t_1$ que l'on demande de calculer.

**72.** — Soit $x'Ox$, $y'Oy$ un système d'axes de coordonnées rectangulaires. Deux mobiles M et N se déplacent respectivement sur les axes $x'Ox$ et $y'Oy$. Chaque mouvement est uniformément varié. A la date $t = 0$, la vitesse de chaque mobile est nulle, l'abscisse de M est égale à 1 et l'ordonnée de N est égale à 1. A la date $t = 1$, M est à l'origine O et l'ordonnée de N est égale à 2.

1° Calculer $\overline{OM} = x$ et $\overline{ON} = y$ en fonction du temps $t$.

2° Vérifier que $x + y$ est constant; en déduire que le point P de coordonnées $x$ et $y$ reste situé sur une droite fixe rencontrant respectivement les axes $x'x$ et $y'y$ aux points A et B que l'on précisera.

On oriente AB de A vers B, calculer $\overline{AP}$ en fonction de $t$ et étudier le mouvement de P sur AB. Construire pour ce mouvement les diagrammes des espaces et des vitesses (les unités de temps, de vitesse et de longueur seront représentées par 1 cm).

3° Calculer $\overline{AP}$ lorsque la distance MN est égale à une longueur donnée $l$. Discuter en fonction de $l$. Donner une construction géométrique des points M et N correspondants et retrouver les résultats de la discussion algébrique. Calculer en fonction de $l$ à quelles dates on a MN $= l$.

**73.** — 1° Un mobile $M_1$ décrit un axe $x'Ox$ d'un mouvement uniformément varié. Former l'équation de son mouvement sachant que son abscisse est nulle aux dates $t = \pm 1$ et égale à $-1$ à la date $t = 0$. (Les unités sont le centimètre et la seconde.)

2° Un deuxième mobile $M_2$ décrit le même axe suivant la loi :

$$x_2 = \overline{OM_2} = -t^2 - 2t + 3.$$

Trouver à quelles dates, en quels points et avec quelles vitesses les mobiles $M_1$ et $M_2$ se rencontrent. Montrer qu'on peut trouver un troisième mobile $M_3$ qui, animé d'un mouvement uniforme, rencontrerait aux mêmes dates $M_1$ et $M_2$; former l'équation de son mouvement.

3° Tracer avec soin, sur un même graphique, les diagrammes des espaces de $M_1$ et $M_2$. Les diagrammes se coupent en deux points A et B; A désignant le point qui correspond à une valeur de $t$ positive, calculer en degrés, minutes et secondes l'angle aigu des tangentes en A aux deux courbes.

On donne :

$$\text{tg } 40°36' = 0{,}85710, \qquad \text{tg } 40°37' = 0{,}85761.$$

**74.** — Un point M est mobile par rapport à un trièdre trirectangle $Oxyz$. Le vecteur-accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ est constamment parallèle à $Ox$ et a une mesure algébrique constante $\gamma \neq 0$.

A la date $t = 0$, le point M est à l'origine O, son vecteur-vitesse $\overrightarrow{M_0V_0}$ est dans le plan $xOy$, sa longueur est $v_0 \geqslant 0$. On désigne par $\alpha$ l'angle aigu $\widehat{xM_0V_0}\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

1° Des relations $x'' = \gamma$; $y'' = 0$; $z'' = 0$ déduire les composantes $x'$, $y'$, $z'$ du vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$ à l'instant $t$, puis les expressions des coordonnées $x$, $y$, $z$ en fonction de $t$, de $v_0$ et de $\alpha$. Montrer que l'on a toujours $z = 0$.

2° Étudier le mouvement lorsque : $v_0 = 0$;

$$\text{et lorsque : } v_0 \neq 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

3° Construire l'hodographe du mouvement.

4° Entre les expressions de $x$ et de $y$ en fonction de $t$, on éliminera $t$. Quelle relation obtient-on? Quelle est la trajectoire, dans le cas général?

**75.** — On considère sur un axe $x'Ox$ deux points mobiles $M_1$, $M_2$ animés de mouvements définis respectivement par les équations horaires :

Pour $M_1$ : $x_1 = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 4$;

Pour $M_2$ : $x_2 = -t^2 + 3t + 4$,

l'unité de longueur étant le centimètre, l'unité de temps la seconde.

1° Étudier et décrire le mouvement de chacun de ces deux mobiles. Exprimer la valeur algébrique à l'instant $t$ de la vitesse de chacun d'eux.

Construire sur le même graphique leurs diagrammes des espaces et des vitesses (on représentera sur ce graphique 1 cm, 1 sec, 1 cm/sec par 1 cm). A quel instant les deux mobiles ont-ils la même vitesse algébrique? Quelle est la propriété correspondante des diagrammes des espaces? A quelle date les mobiles ont-ils des vitesses opposées? Qu'en résulte-t-il sur les diagrammes?

2° Exprimer en fonction de $t$ la distance (non orientée) $d$ = longueur $M_1M_2$. Étudier ses variations. En tracer la courbe représentative.

3° A quelle date la distance $M_1M_2$ a-t-elle une valeur $l$ donnée? Discuter.

**76.** — On donne un axe $x'x$ sur lequel a été choisie une origine des abscisses O.

1° Un point M se déplace sur $x'x$ d'un mouvement uniforme. Former l'équation horaire de son mouvement, sachant qu'à l'instant $t = 0$ il passe au point A d'abscisse $-\frac{5}{2}$ et qu'à l'instant $t = 6$ il se trouve au point B d'abscisse $\frac{7}{2}$.

Tracer le diagramme des espaces et le diagramme des vitesses du mouvement du point M.

2° Un point P se déplace sur l'axe $x'x$ en même temps que le point M; le mouvement du point P est uniformément varié. Ce point se trouve en A à la date $t = 0$, et sa vitesse a pour valeur $-2$.

Former l'équation horaire du mouvement du point P, sachant que le mobile passe à nouveau par A à la date $t = 4$.

Tracer le diagramme des espaces et le diagramme des vitesses du mouvement du point P.

3° Les deux mobiles se rencontrent en un point autre que A; trouver la date et le lieu de cette rencontre, ainsi que la vitesse de P à cette date.

Les diagrammes des espaces des deux mouvements étant tracés sur la même figure avec la même unité graphique pour les espaces et les temps, calculer la tangente trigonométrique de l'angle que font entre elles les tangentes aux deux diagrammes au point représentatif de la deuxième rencontre des deux mobiles.

**77.** — Sur un axe $x'Ox$ se déplacent deux mobiles M et N animés de mouvements uniformément variés.

Le premier M se trouve à l'origine à l'instant $t = 0$; sa vitesse à cet instant est 4 m/s. D'autre part au temps $t = 4$ s sa vitesse est nulle.

Le deuxième N se trouve au temps $t = 2$ s au point d'abscisse $+6$ et au temps $t = 6$ s au point d'abscisse $-2$ et sa vitesse est nulle.

1° Trouver les équations horaires et les équations des vitesses des deux mobiles M et N. Tracer les diagrammes des deux mouvements sur un même graphique.

2° On considère un troisième mobile P qui décrit aussi $x'Ox$ en restant équidistant des deux mobiles M et N. Déterminer son équation horaire et tracer son diagramme sur le même graphique que ci-dessus. Quelles remarques faites-vous?

3° On considère un quatrième mobile Q animé d'un mouvement rectiligne uniforme d'équation horaire $x = 2t + a$.

Quelles valeurs peut prendre $a$ pour que ce mobile rencontre les deux premiers?

CHAPITRE IV

# MOUVEMENTS PÉRIODIQUES

- **1.** *Mouvement circulaire uniforme.*
- **2.** *Mouvement rectiligne vibratoire simple.*
- **3.** *Construction de Fresnel.*

## 1 MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

■ **57. Vecteur-vitesse, à l'instant $t$, dans un mouvement circulaire.** — Soit M un point mobile dont la trajectoire est un cercle (C). Ce cercle est défini par son plan, son centre O et son rayon R.

Prenons, sur ce cercle, une origine A et orientons les abscisses curvilignes dans le sens trigonométrique (fig. 74). On peut repérer la position du point M par l'angle :

$$\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}),$$

des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$, le plan étant orienté dans le sens trigonométrique. Cet angle $\theta$, *mesuré en radians*, est défini à $2k\pi$ près. On l'appelle l'***angle horaire*** du point M. Le mouvement circulaire sera déterminé, une fois le cercle donné, par la relation :

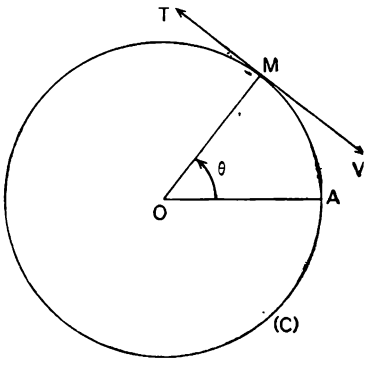


Fig. 74.

$$\theta = f(t)$$

qui donne $\theta$ en fonction du temps $t$.

On sait que l'abscisse curviligne $s = \overset{\frown}{AM}$ est égale à :

$$s = R\theta.$$

L'équation horaire du mouvement est donc :

$$s = Rf(t).$$

Le vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$ est tangent au cercle en M et sa mesure algébrique $v$ sur la tangente, orientée positivement dans le sens des $\theta$ croissants, est :

$$v = s' = R\,\theta' = Rf'(t)$$

(sur la figure 74, $v < 0$).

En posant : $\omega = f'(t)$

on a : $\boxed{v = R\omega.}$ (1)

**Définition.** *On appelle* ***vitesse angulaire,*** *à l'instant* **t,** *d'un mouvement circulaire, la dérivée de l'angle horaire par rapport au temps.*

Avec cette définition, nous pouvons alors énoncer :

⟶ La vitesse à l'instant t d'un mouvement circulaire est le produit du rayon et de la vitesse angulaire au même instant.

■ **58. Mouvement circulaire uniforme.** — Pour que le mouvement soit *uniforme,* il faut et il suffit que $v$ soit constante donc $\omega$ aussi.

$$f'(t) = \omega$$

d'où[1] : $\boxed{\theta = \omega t + \theta_0}$ où $\theta_0$ est une constante.

L'angle $\theta$ s'accroît de quantités égales en des temps égaux. Quand l'angle $\theta$ subit un accroissement de $2\pi$, il s'est écoulé un temps T tel que l'on ait :

$$2\pi = \omega T \qquad \text{ou :} \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}.}$$

Le mobile repasse, si le temps continue à croître, par les mêmes positions. Si $t$ augmente de T, $\theta$ augmente de $2\pi$ et la position du point et sa vitesse sont à nouveau les mêmes. On dit :

⟶ Le mouvement circulaire uniforme est **périodique.**

La vitesse angulaire et la ***période*** sont liées par la relation fondamentale :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}.}$$

1. Il est important de noter que cette expression suppose que $\omega$ est une constante. Dans le cas général, $\theta$ est une *primitive* de $\omega$.

● REMARQUE. — Le choix du point A, origine des abscisses curvilignes, étant arbitraire, nous pouvons convenir de le choisir de façon que pour $t = 0$ on ait $\theta = 0$.

La relation : $\theta = \omega t + \theta_0$

se simplifie alors : $\theta = \omega t$.

■ **59. Unité de vitesse angulaire.** — L'unité de vitesse angulaire est liée à l'unité d'angle et à l'unité de temps.

**Définition.** *L'unité de vitesse angulaire est la vitesse angulaire d'un mouvement circulaire uniforme dans lequel l'angle horaire s'accroît de l'unité d'angle pendant l'unité de temps.*

On obtient ainsi, par exemple, le radian par seconde : abréviation rd/s.

On évalue aussi une vitesse angulaire en tours à la seconde; ou en tours à la minute, à l'heure..., un tour[1] correspondant à $2\pi$ radians.

EXEMPLE. — *Un point décrit un cercle de rayon* $R = 0{,}5$ *m d'un mouvement uniforme. Il fait* **10** *tours par minute.*

1° *Calculer la vitesse angulaire en radians par seconde.*

2° *Calculer la vitesse en centimètres par seconde.*

1° Un tour valant $2\pi$ radians, **10** tours valent **20** $\pi$ radians.
La vitesse angulaire $\omega = 20\pi$ radians par minute

$$= \frac{20\pi}{60} \text{ radians par seconde}$$

d'où : $\omega = \frac{\pi}{3}$ rd/s.

2° En centimètres, $R = 50$. La vitesse est donc :

$$v = \omega R = \frac{50\pi}{3} \text{ cm/s.}$$

■ **60. Hodographe d'un mouvement circulaire uniforme.** — Soit un point M décrivant un cercle (C) d'un mouvement *uniforme*. On a vu que la vitesse $v$ du mobile est :

$$v = R\omega.$$

(R = rayon du cercle; $\omega$ = vitesse angulaire du mouvement). Menons le vecteur $\overrightarrow{O_1m}$, d'origine $O_1$, équipollent au vecteur $\overrightarrow{MV}$

1. AFNOR (Association Française de Normalisation) conseille les abréviations : tr/s; tr/mn

(fig. 75). Puisque $\overrightarrow{MV}$ a une longueur constante, le point $m$ décrit le cercle de centre $O_1$ et de rayon $R|\omega|$. Tout point de ce cercle est atteint dans l'intervalle d'une période.

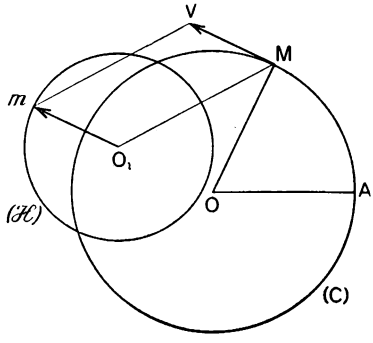


Fig. 75.

⟶ L'hodographe d'un mouvement circulaire uniforme, relatif à un point $O_1$, est un cercle de rayon $O_1$ et de rayon $R|\omega|$.

■ **61. Vecteur-accélération d'un mouvement circulaire uniforme.** — Supposons d'abord $\omega > 0$. Le vecteur-vitesse du point M est $\overrightarrow{MV}$. L'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MV})$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$. Construisons l'hodographe relatif au centre O du cercle; c'est le lieu du point $m$ extrémité du vecteur $\overrightarrow{Om}$, d'origine O, tel que $\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{MV}$. Cet hodographe est le cercle de centre O et de rayon $R\omega$. On a (fig. 76) :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Om}) = +\frac{\pi}{2}.$$

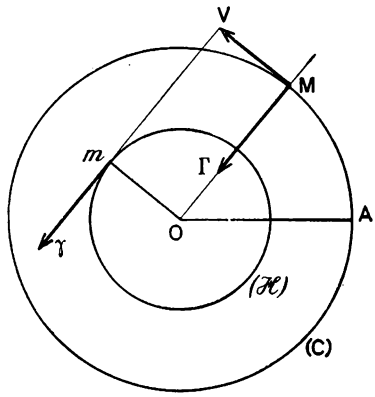


Fig. 76.

Le vecteur $\overrightarrow{Om}$ tourne donc uniformément, sa vitesse angulaire est aussi $\omega$. Le vecteur-vitesse de $m$ est $\overrightarrow{m\gamma}$ tel que :

$$(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{m\gamma}) = +\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad m\gamma = \omega . Om$$

donc :

$$m\gamma = \omega . R\omega = \omega^2 R.$$

Le vecteur-accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ du point M est le vecteur, d'origine M, équipollent à $\overrightarrow{m\gamma}$. L'angle des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{M\Gamma}$ est :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{M\Gamma}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Om}) + (\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{m\gamma}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Le vecteur $\overrightarrow{M\Gamma}$ est donc normal au cercle et il est dirigé vers le centre du cercle. Sa longueur est constante.

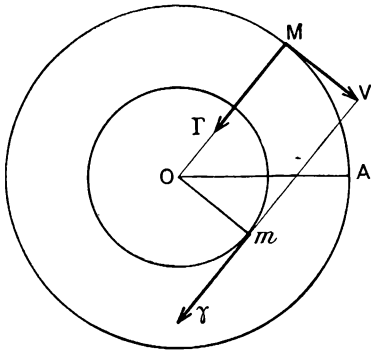
Si l'on a $\omega < 0$, les raisonnements sont les mêmes excepté que l'on a (fig. 77) :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Om}) = -\frac{\pi}{2};$$

$$(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{m\gamma}) = -\frac{\pi}{2}$$

donc :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{M\Gamma}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$




$\omega < 0$

Fig. 77.

Les conclusions sont les mêmes. Nous énoncerons :

**Théorème.** — Dans un mouvement circulaire uniforme, de vitesse angulaire $\omega$, sur un cercle de rayon R, le vecteur-accélération est dirigé vers le centre et a pour longueur constante $\omega^2 R$.

$$\boxed{\gamma = \omega^2 R.}$$

● REMARQUES. — 1° On notera que le vecteur-accélération d'un mouvement *circulaire uniforme* n'est pas nul. Cet exemple montre que la longueur du vecteur-accélération d'un mouvement curviligne n'est pas la dérivée de la longueur du vecteur-vitesse.

2° Nous retrouvons ainsi, sur le mouvement circulaire uniforme, la propriété établie au n° 45 pour un mouvement uniforme quelconque : $\overrightarrow{M\Gamma}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{MV}$.

EXEMPLE. — *Un point* M *décrit un cercle, de rayon* R = 10 *cm, d'un mouvement uniforme de façon que la longueur v du vecteur-vitesse soit la moitié de la longueur* $\gamma$ *du vecteur-accélération.*

1° *L'unité de temps étant la seconde, calculer la vitesse angulaire* $\omega$ *du mobile.*

2° *Déterminer à une unité près le nombre de tours par heure.*

3° *Calculer v et* $\gamma$. *Construire l'hodographe.*

1° On a : $R|\omega| = \frac{1}{2}R\omega^2$, d'où : $|\omega| = 2$ rd/s

(car $\omega \neq 0$.)

2° Un tour est décrit en : $\frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$ secondes.

En une heure, le mobile décrit :

$$\frac{1}{\pi} \times 3\,600 \text{ tours} = 1\,146 \text{ tours par excès.}$$

3° On a :

$$|v| = R|\omega| = 20 \text{ cm/s.}$$
$$|\gamma| = R\omega^2 = 40 \text{ cm/s}^2.$$

L'hodographe, relatif au centre O du cercle, est le cercle concentrique et de rayon 2R (fig. 78).

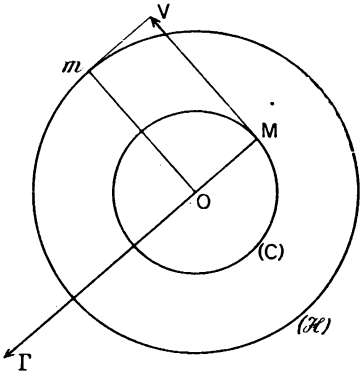



Fig. 78.

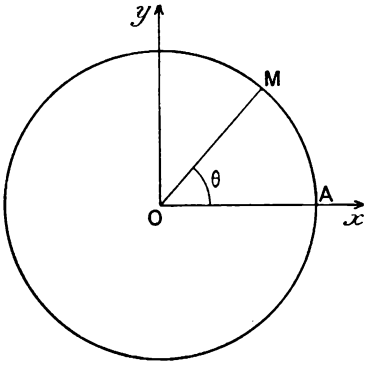



Fig. 79.

■ **62. Étude algébrique du mouvement circulaire uniforme.** — Prenons pour origine le centre du cercle, pour axe $Ox$, l'axe porté par le diamètre OA et dirigé positivement de O vers A. L'axe $Oy$ est choisi directement perpendiculaire à $Ox$. Les coordonnées $x$ et $y$ du point M qui décrit le cercle (C) de centre O et de rayon R sont (fig. 79) :

$$x = R\cos\theta$$
$$y = R\sin\theta.$$

Le mouvement étant uniforme, on a :

$$\theta = \omega t + \theta_0;$$

donc :

$$x = R\cos(\omega t + \theta_0)$$
$$y = R\sin(\omega t + \theta_0).$$

Les composantes du vecteur-vitesse, à l'instant $t$, sont :

$$x' = -R\omega\sin(\omega t + \theta_0) = -\omega y$$
$$y' = R\omega\cos(\omega t + \theta_0) = \omega x.$$

On en déduit :

$$v^2 = x'^2 + y'^2 = R^2\omega^2.$$

Les composantes du vecteur-accélération sont :

$$x'' = -R\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x$$
$$y'' = -R\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 y.$$

On en conclut que ces composantes sont proportionnelles aux composantes $-x$ et $-y$ du vecteur $\overrightarrow{MO}$.

On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{M\Gamma} = \omega^2 \overrightarrow{MO}.}$$

On retrouve les résultats établis géométriquement.

## EXERCICES

**78.** — On calcule la mesure $\omega$ d'une vitesse angulaire avec une certaine unité de temps T. Que devient cette mesure quand on prend une nouvelle unité de temps $\frac{T}{a}$, $a$ étant un nombre donné?

**79.** — Un point M décrit un cercle de rayon R = 0,5 m d'un mouvement uniforme. Il fait 10 tours par minute.

1° Calculer la vitesse angulaire en rd/s.

2° Calculer la vitesse en cm/s.

3° Calculer l'accélération en cm/s².

**80.** — Un train, animé d'une vitesse constante de 70 km/h, décrit un arc de cercle dont le rayon est 1 km. Quelle est l'accélération d'un point du train (unités : le mètre et la seconde)?

**81.** — Calculer les accélérations des extrémités des aiguilles d'une montre, sachant que les longueurs des aiguilles sont 1 cm et 1,3 cm (unités : le centimètre et la seconde).

**82.** — Un point M décrit un cercle, de centre O et de rayon R, d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $\omega$. On projette orthogonalement en P sur OM, un point fixe A du plan du cercle (OA = $a$). Déterminer la trajectoire de P, ainsi que sa vitesse et son accélération.

**83.** — Un point M est mobile, dans un plan, et ses coordonnées, en fonction du temps $t$, sont :

$$x = a(1 + \cos t); \qquad y = a \sin t.$$

1° Montrer que le mouvement est circulaire uniforme.

2° Calculer la vitesse et l'accélération.

3° Construire l'hodographe.

**84.** — Un cercle (C) de rayon 2 centimètres, a son centre O sur un cercle (C'), de centre O' et de rayon 4 centimètres. Un mobile M décrit le cercle (C) et la droite OM recoupe (C') en M'. Ces cercles (C) et (C') sont fixes.

1° Démontrer que si le mouvement de l'un des points M ou M' est uniforme, il en est de même de l'autre.

2° Sachant que M fait 5 tours par seconde, calculer la vitesse et l'accélération des points M et M'.

## 2 MOUVEMENT RECTILIGNE VIBRATOIRE SIMPLE

■ **63. Définition.** — *On appelle* ***mouvement rectiligne vibratoire simple*** *le mouvement de la projection orthogonale d'un point, animé d'un mouvement circulaire uniforme, sur une droite du plan du cercle.*

Soit M le point animé d'un mouvement circulaire uniforme sur le cercle (C), de centre O et de rayon R (fig. 80). Il se projette orthogonalement en $M_1$ sur une droite $(D_1)$ du plan.

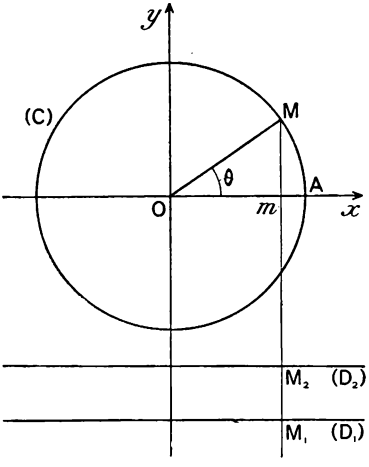


Fig. 80.

Choisissons un axe $x'Ox$ parallèle à $(D_1)$ et un axe $y'Oy$ perpendiculaire.

Si nous remplaçons $(D_1)$ par une autre droite parallèle $(D_2)$, le point M se projette en $M_2$ sur $(D_2)$. Les points $M_1$ et $M_2$ ont même abscisse $x$ et ont des ordonnées constantes.

Leurs mouvements sont donc identiques.

Nous prendrons pour droite l'axe $x'Ox$ lui-même.

Choisissons pour origine des temps la date où le mobile M passe au point A du cercle qui est sur la partie positive de l'axe $x'Ox$.

Nous savons alors que l'angle horaire :

$$\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$$

est égal à :

$$\theta = \omega t$$

où $\omega$ désigne la vitesse angulaire du mouvement de M. Le point M se projette en $m$ sur l'axe $x'Ox$ et l'abscisse du point $m$, sur $x'Ox$, est :

$$x = R \cos\theta$$

$$\boxed{x = R \cos \omega t.} \qquad (1)$$

■ **64. Étude géométrique du mouvement.** — Le mouvement de M est ***périodique*** et a pour période :

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|}.$$

Il en est donc de même du mouvement du point $m$ qui oscille sur le diamètre entre les positions extrêmes A et A'. Le vecteur vitesse $\overrightarrow{mv}$ est la projection du vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$. Ce dernier est constant en grandeur, mais variable en direction.

Nous pouvons supposer $\omega > 0$ (fig. 81).

Le cas $\omega < 0$ correspond au point symétrique de M par rapport à $Ox$ : le point $m$ est le même.

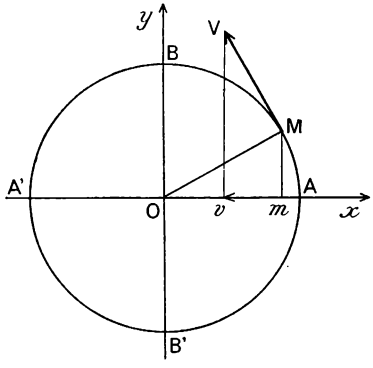


Fig. 81.

1° *Lorsque* M *décrit le quadrant* AB, la projection $mv$, d'abord nulle, est maximum quand M est en B, donc quand $m$ est en O. Ce mouvement s'effectue pendant le temps $\frac{T}{4}$ et la valeur absolue de la vitesse croît, *le mouvement est donc accéléré.*

2° *Quand le point* M *va de* B *en* A', la projection $mv$ diminue pour devenir nulle. Le point $m$ va donc de O en A' d'un *mouvement retardé* pendant un nouvel intervalle de temps égal à $\frac{T}{4}$.

Quand le point M va de A' en B' et de B' en A, les circonstances du mouvement de M et celles du mouvement projeté sont celles que l'on vient d'étudier. Le point $m$ va donc de A' en O d'un mouvement accéléré, puis de O en A d'un mouvement retardé et ainsi de suite.

■ **65. Étude algébrique du mouvement.** — Reprenons l'équation horaire :

$$x = a\cos\omega t.$$

Nous pouvons supposer $\omega > 0$.

Quand l'angle $\omega t$ augmente de $2\pi$, c'est-à-dire quand $t$ augmente de la quantité :

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

$x$ reprend la même valeur.

Le mouvement est donc ***périodique*** et a pour période $\frac{2\pi}{\omega}$. Il suffit d'étudier ce qui se passe pendant la période qui s'écoule entre l'instant zéro et l'instant T.

Nous avons :

$$v = -a\omega \sin \omega t,$$
$$\gamma = -a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

Nous pouvons alors dresser le tableau suivant :

| $t$ | 0 | | $\frac{T}{4}$ | | $\frac{T}{2}$ | | $\frac{3T}{4}$ | | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega t$ | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
| $x$ | $a$ | ↘ | 0 | ↘ | $-a$ | ↗ | 0 | ↗ | $a$ |
| $v$ | 0 | ↘ | $-a\omega$ | ↗ | 0 | ↗ | $a\omega$ | ↘ | 0 |
| $\gamma$ | | − | | + | | + | | − | |

On s'est borné à indiquer le signe de l'accélération.

Le signe du produit $v\gamma$ indique si le mouvement est accéléré ou retardé. Les conclusions sont celles qui ont été indiquées plus haut. Le mouvement comprend quatre phases dont chacune a pour durée un quart de période.

1re **phase** : le mouvement est *accéléré*, le mobile va de A en O.

2e **phase** : le mouvement est *retardé*, le mobile va de O en A'.

3e **phase** : le mouvement est *accéléré*, le mobile va de A' en O.

4e **phase** : le mouvement est *retardé*, le mobile va de O en A.

Puis le mouvement se reproduit périodiquement.

● REMARQUE. — On notera que le vecteur-accélération est toujours dirigé de $m$ vers O et que sa longueur est proportionnelle à la distance O$m$.

$$\overrightarrow{m\gamma} = \omega^2 \overrightarrow{mO}.$$

■ **66. Relation entre l'abscisse et la vitesse.** — Nous avons les deux relations :

$$x = a \cos \omega t,$$
$$v = -a\omega \sin \omega t.$$

On en tire :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2\omega^2} = 1,$$

ou encore :

$$\boxed{v^2 = \omega^2(a^2 - x^2).}$$

On voit, sur cette formule, que si l'on considère deux points M et M', symétriques par rapport à O et intérieurs au segment AA' (fig. 82), le carré de la vitesse est le même à chaque passage du mobile en ces points. Or, pendant une période, le mobile passe deux fois en M et deux fois en M'. A chacun de ces passages la valeur absolue de la vitesse est la même.

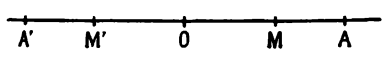


Fig. 82.

■ **67. Terminologie du mouvement rectiligne vibratoire simple.** — Le mouvement rectiligne vibratoire simple est fondamental en physique. Aussi emploie-t-on une terminologie spéciale qu'il est bon de connaître.

Le ***centre*** du mouvement est le milieu du segment de droite décrit par le point au cours d'une oscillation.

L'abscisse $x$ du mobile, comptée à partir du centre du mouvement, est son ***élongation***.

L'***amplitude*** du mouvement est la valeur absolue de l'élongation maximum. L'amplitude du mouvement que nous avons étudié est R. La portion de la trajectoire effectivement décrite par le mobile a pour longueur 2 R.

La ***période*** du mouvement est l'intervalle de temps qui sépare deux passages dans le même sens du mobile au centre du mouvement.

La ***fréquence*** est le nombre de périodes par seconde. Si T est la période évaluée en secondes, la fréquence est :

$$N = \frac{1}{T}.$$

Comme on a :

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

on en déduit :

$$N = \frac{\omega}{2\pi}.$$

■ **68. Diagrammes.** — *Le diagramme des espaces* est une sinusoïde qui représente les variations de la fonction :

$$x = a \cos \omega t.$$

Comme l'on a : $v = -a\,\omega \sin \omega t$ le *diagramme des vitesses* est aussi une sinusoïde.

EXEMPLE. — *Diagrammes des espaces et des vitesses du mouvement :*

$$x = 3 \cos \frac{\pi t}{2}.$$

La période du mouvement est T = 4. Nous ferons varier $t$ de 0 à 4.

On a :
$$v = -\frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{2}$$

| $t$ | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 3 | ↘ | 0 | ↘ | $-3$ | ↗ | 0 | ↗ | 3 |
| $v$ | 0 | ↘ | $-\frac{3\pi}{2}$ | ↗ | 0 | ↗ | $\frac{3\pi}{2}$ | ↘ | 0 |

La figure 83 montre ces diagrammes.

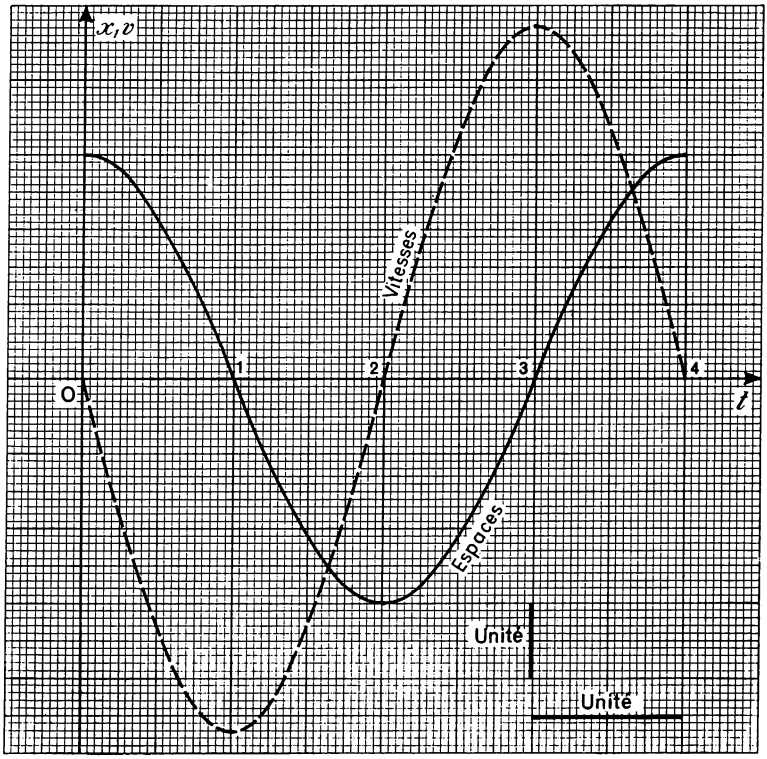



Fig. 83.

## EXERCICES

**85.** — Déterminer l'équation horaire $x = a\cos\omega t$ d'un mouvement rectiligne vibratoire simple sachant que la période est 12 secondes et qu'à la date $t = 1$ s, la vitesse du mobile est $v : -\frac{\pi}{6}$ cm/s.

**86.** — 1° Montrer que le mouvement rectiligne dont l'équation horaire est : $x = \cos^2 t$

est un mouvement vibratoire simple.

2° Trouver le centre et la période du mouvement.

3° Construire les diagrammes des espaces et des vitesses.

**87.** — Mêmes questions avec : $x = \sin^2 t$.

**88.** — Un point se meut sur la parabole : $y^2 = 4ax$ et la projection du point sur $Oy$ a un mouvement défini par l'équation :

$$y = a\sin\omega t.$$

Étudier le mouvement de la projection du point M sur $Ox$.

**89.** — On considère, dans le plan $xOy$, une droite (D) passant par O et tournant autour de O avec une vitesse angulaire constante $\omega$. A la date $t = 0$, elle coïncide avec $Ox$. Elle coupe en M le cercle fixe (C), de rayon R, passant par O, et centré sur $Ox$.

1° Étudier le mouvement du point M sur (D).

2° La tangente en M au cercle (C) rencontre la tangente en O à (C) en un point T. Calculer la vitesse du point T en fonction de $\overline{OT} = y$, de R et de $\omega$.

**90.** — Tracer les diagrammes des espaces et des vitesses des mouvements vibratoires simples définis par les équations horaires :

1° $x = -2\cos\frac{\pi t}{3}$ $\quad (0 < t < 6)$;

2° $x = \sin\frac{\pi t}{4}$ $\quad (0 < t < 8)$.

**91.** — Un point M décrit un cercle (C) de rayon $a$, d'un mouvement uniforme de façon que la vitesse angulaire $\omega$ est égale à 1 rd/s. Soit O le centre du cercle et A la position de M à la date $t = 0$. On projette orthogonalement M en $m$ sur un plan (P) passant par OA et faisant 45° avec le plan du cercle (C).

1° Quelle est la trajectoire de $m$?

2° Utiliser les théorèmes concernant le mouvement projeté (n° 38) pour préciser la nature de l'hodographe du mouvement de $m$ et pour montrer que le vecteur-accélération du point $m$ est dirigé vers O. Évaluer la longueur de ce vecteur-accélération en fonction de la longueur $mO$.

**92.** — Dans l'équation horaire $x = a\cos\omega t$, on suppose que l'on a :

$$a = 19{,}182 \text{ cm}; \qquad \omega = \sqrt{2{,}7873} \text{ rd/s}.$$

1° Calculer, avec la précision des tables de logarithmes à cinq décimales la période T du mouvement.

2° Calculer la grandeur de l'accélération à la date $t = 5{,}28$ s.

## 3 CONSTRUCTION DE FRESNEL

■ **69. Équation générale du mouvement rectiligne vibratoire simple.** — Nous avons étudié le mouvement vibratoire simple dont l'équation horaire :

$$x = a\cos\omega t$$

est simple parce que l'origine des espaces est le centre du mouvement et l'origine des temps est l'un des instants où l'élongation est maximum.

Si nous changeons l'origine des temps, l'ancien temps $t$ est lié au nouveau temps $t'$ par la relation :

$$t = t' + t_0.$$

On en déduit :

$$\omega t = \omega t' + \omega t_0$$

ou, en posant : $\omega t_0 = \varphi$

$$\omega t = \omega t' + \varphi.$$

Par suite :

$$x = a\cos(\omega t' + \varphi)$$

ou :

$$x = a\cos\varphi\cos\omega t' - a\sin\varphi\sin\omega t'.$$

Si l'on change de plus l'origine des espaces, on aura pour nouvelle équation horaire :

$$X = a\cos\varphi\cos\omega t' - a\sin\varphi\sin\omega t' + x_0.$$

Posons : $a\cos\varphi = A$ et $-a\sin\varphi = B.$

On peut alors écrire :

(1) $$X = x_0 + A\cos\omega t' + B\sin\omega t'.$$

**Réciproquement,** proposons-nous d'étudier un mouvement rectiligne défini par l'équation horaire (1).

Un changement d'origine des espaces :

$$X = x_0 + x$$

ramène l'étude à celle du mouvement :

$$x = A\cos\omega t' + B\sin\omega t'.$$

Nous poserons ensuite :

$$A = a\cos\varphi \quad \text{et} \quad B = -a\sin\varphi.$$

En prenant $a = \sqrt{A^2 + B^2}$, l'angle $\varphi$ est alors déterminé à $2k\pi$ près par la connaissance de son sinus et de son cosinus.

Il vient :

$$x = a\cos(\omega t' + \varphi).$$

Nous changerons, enfin, l'origine des temps par la formule :

$$\omega t' + \varphi = \omega t$$

et nous aboutissons à la relation :

$$x = a\cos\omega t.$$

Nous énoncerons :

**Théorème.** — L'équation horaire générale d'un mouvement rectiligne vibratoire simple est :

$$x = x_0 + A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

L'abscisse du centre du mouvement est : $x_0$.

La période est : $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

L'amplitude est : $a = \sqrt{A^2 + B^2}$.

La démonstration a montré que l'on peut écrire aussi :

$$x = x_0 + a\cos(\omega t + \varphi).$$

EXEMPLE. — *Mouvement rectiligne vibratoire simple sachant que l'origine des abscisses est le centre du mouvement, que la période est* 4 *s et qu'à :*

$$t = 2\text{ s}, \quad \textit{on a :} \quad x = -1 \quad \textit{et} \quad v = +\frac{\pi}{2}\text{ cm/s}.$$

Soit $x = x_0 + A\cos\omega t + B\sin\omega t.$

On a : $x_0 = 0$

$$T = 4 = \frac{2\pi}{|\omega|}, \quad \text{donc :} \quad |\omega| = \frac{\pi}{2}$$

$$x = A\cos\frac{\pi t}{2} + B\sin\frac{\pi t}{2}.$$

(Il est inutile d'étudier le cas $\omega = -\dfrac{\pi}{2}$ ; cela revient à changer la constante B en — B).

$$v = -\frac{A\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{2} + \frac{B\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}.$$

Pour $t = 2$, on a : $x = -1 = A\cos\pi$; d'où : $A = +1$

$$v = \frac{\pi}{2} = \frac{B\pi}{2}\cos\pi; \quad \text{d'où :} \quad B = -1.$$

L'équation horaire du mouvement est : $x = \cos\dfrac{\pi t}{2} - \sin\dfrac{\pi t}{2}$.

Rappelons la relation trigonométrique :

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

On peut donc écrire aussi :

$$x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right).$$

■ **70. Construction de Fresnel**[1]. — Il est possible d'interpréter géométriquement la relation :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Considérons, par rapport à deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$, deux axes $\vec{Ou}$ et $\vec{Ov}$ définis par les angles (fig. 84) :

$$(\vec{Ox}, \vec{Ou}) = \omega t$$

et

$$(\vec{Ox}, \vec{Ov}) = \omega t + \frac{\pi}{2}.$$

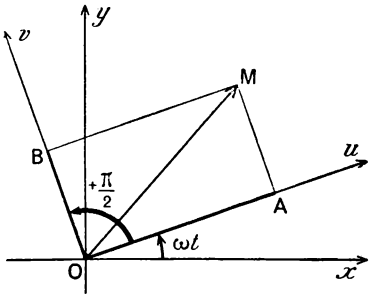



Fig. 84.

Sur $\vec{Ou}$, construisons le vecteur $\vec{OA}$ de mesure A et sur $\vec{Ov}$ le vecteur $\vec{OB}$ de mesure — B. Les projections orthogonales sur $Ox$ des vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont respectivement :

$$A\cos\omega t \quad \text{et} \quad -B\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = B\sin\omega t.$$

Par suite : $A\cos\omega t + B\sin\omega t$

est la projection sur $Ox$ du vecteur $\vec{OM}$ somme de $\vec{OA}$ et de $\vec{OB}$. Or le quadrilatère OAMB est un rectangle de grandeur invariable, quand $t$ varie. Le point M décrit donc le cercle, de centre O et de rayon $\sqrt{A^2 + B^2}$, d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $\omega$. Cette construction, appelée ***construction de Fresnel***, met ainsi en évidence, géométriquement, le résultat du calcul fait au n° 69. Elle fournit immédiatement l'amplitude

$$a = OM = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Nous allons la généraliser.

■ **71. Composition de deux mouvements rectilignes vibratoires simples de même période.** — Soit à étudier le mouvement rectiligne dont l'équation horaire est :

(1) $$x = a\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta).$$

Considérons, dans le plan $xOy$, les axes $\vec{Ou}$ et $\vec{Ov}$ définis par les angles (fig. 85).

$$(\vec{Ox}, \vec{Ou}) = \omega t + \alpha;$$

$$(\vec{Ox}, \vec{Ov}) = \omega t + \beta.$$

1. Augustin FRESNEL, physicien français (1788-1827).

Sur ces axes, construisons respectivement les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ de mesures respectives $a$ et $b$. Le point A décrit le cercle de centre O et de rayon $|a|$ d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $\omega$. Le point B décrit le cercle de centre O et de rayon $|b|$ d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $\omega$. Les projections respectives sur $Ox$ des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont :

$$a\cos(\omega t + \alpha) \qquad \text{et} \qquad b\cos(\omega t + \beta).$$

Donc : $$x = a\cos(\omega t + a) + b\cos(\omega t + \beta)$$

est la projection, sur $Ox$, du vecteur $\overrightarrow{OM}$, somme vectorielle de $\overrightarrow{OA}$ et de $\overrightarrow{OB}$.

Or le parallélogramme OAMB a des côtés de longueurs constantes : $OA = |a|$ et $OB = |b|$ et des angles constants car on a :

$$(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Ov}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ov}) - (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ou}) = (\omega t + \beta) - (\omega t + \alpha)$$
$$= \beta - \alpha.$$

Si $a$ et $b$ sont de même signe, on a, à $2k\pi$ près :

$$\widehat{AOB} = \beta - \alpha \quad \text{(fig. 85).}$$

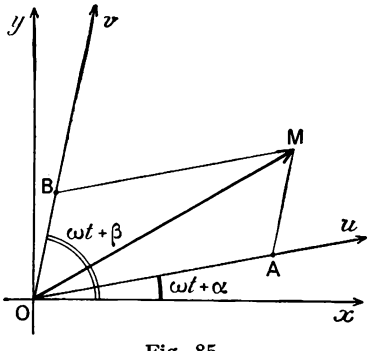



Fig. 85.

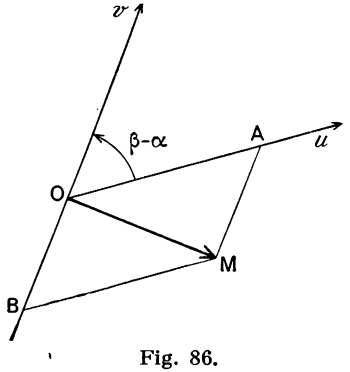



Fig. 86.

Si $a$ et $b$ sont de signes contraires, on a, à $2k\pi$ près :

$$\widehat{AOB} = \pi - (\beta - \alpha) \quad \text{(fig. 86).}$$

Le parallélogramme OAMB, quand $t$ varie, reste donc invariable. La longueur OM est constante. L'angle $(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{OM})$ est aussi constant, soit : $(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{OM}) = \varphi$.

D'où : $$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ou}) + (\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{OM})$$
$$= \omega t + \alpha + \varphi.$$

Le point M décrit donc un cercle de centre O d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $\omega$. On en conclut que :

⟶ le mouvement rectiligne dont l'équation horaire est :

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta)$$

est un mouvement vibratoire simple dont le centre est l'origine O et dont la période est : $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

L'amplitude est la longueur de la diagonale OM du parallélogramme OAMB.

Il peut arriver que le point M soit immobile en O : il suffit pour cela que l'on ait :

$$a = b \quad \text{et} \quad \beta - \alpha = \pi + 2k\pi$$

ou : $$a = -b \quad \text{et} \quad \beta - \alpha = 2k\pi.$$

• REMARQUE. — La question peut être traitée par le calcul.

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta).$$

En développant, on trouve :

$$x = (a\cos\alpha + b\cos\beta)\cos\omega t + (-a\sin\alpha - b\sin\beta)\sin\omega t$$

soit :

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

relation qui montre que ce mouvement est vibratoire simple.

L'amplitude est :

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(a\cos\alpha + b\cos\beta)^2 + (a\sin\alpha + b\sin\beta)^2}$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)}.$$

## EXERCICES

**93.** — Déterminer l'amplitude du mouvement :

$$x = \cos\omega t + \cos(\omega t + \varphi).$$

Pour quelles valeurs de $\varphi$ est-elle minimum ou maximum?

**94.** — Calculer l'amplitude du mouvement vibratoire défini par :

$$x = 5 - 22\cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) + 70\cos 3t.$$

**95.** — Étudier les mouvements :

$$x = \cos\omega t - \sqrt{3}\sin\omega t;$$

$$x = \cos\pi t + 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$x = \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right).$$

## *EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV*

**96.** — Deux cyclistes roulent sur deux pistes circulaires concentriques de longueurs respectivement égales à 560 et 600 mètres, chacun d'eux étant animé d'un mouvement uniforme. Lorsqu'ils marchent dans le même sens, celui qui parcourt la circonférence intérieure dépasse l'autre toutes les quatre minutes. Quand ils marchent en sens contraires, ils se croisent toutes les quarante-huit secondes. D'après cela on demande d'évaluer la vitesse et l'accélération de chaque cycliste (unités : le km et l'heure).

On dit que les coureurs se dépassent ou se croisent lorsqu'ils se trouvent en ligne droite avec le centre et du même côté.

**97.** — On considère une piste circulaire ayant 4 km de longueur. Sur cette piste se déplace un cycliste M avec une vitesse constante de 24 km/h, il tourne toujours dans le même sens. Un chien $m$ se déplace aussi sur la piste avec une vitesse constante de 16 km/h. M et $m$ partent, à la date $t = 0$, du même point A de la piste. On suppose que le chien tourne en restant toujours sur le plus petit des arcs de cercle ayant pour extrémités sa position et celle du cycliste.

1° A quelle date le chien cesse-t-il pour la 1re fois de courir dans le même sens?

2° A quelle date le chien et le cycliste se croisent-ils pour la 1re fois?

3° A quelle date le chien et le cycliste seront-ils, ensemble, de nouveau en A pour la 1re fois?

**98.** — 1° Démontrer que le mouvement rectiligne défini par la loi :

$$x = 5 - 2\cos^2 t.$$

est un mouvement oscillatoire simple.

2° Trouver le centre des oscillations, la période et l'amplitude.

3° Déterminer à la date $t$ la vitesse et l'accélération de ce mouvement et les exprimer en fonction de $x$.

**99.** — Un point M est animé d'un mouvement rectiligne vibratoire simple. L'origine des abscisses est le centre du mouvement. On connaît la période T du mouvement et on sait qu'à l'instant $t = 0$, l'abscisse du mobile est $x_0$ et sa vitesse $v_0$.

1° Former l'équation horaire du mouvement.

2° Calculer l'amplitude du mouvement.

3° Trouver la relation qui lie l'abscisse et la vitesse et retrouver l'amplitude à l'aide de cette relation.

**100.** — 1° Généraliser la construction de Fresnel pour étudier le mouvement rectiligne défini par :

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta) + c\cos(\omega t + \gamma).$$

2° Étudier le mouvement :

$$x = \cos\omega t + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

**101.** — On considère un trièdre trirectangle $Oxyz$. Dans le plan $xOy$, on appelle (C) le cercle de centre O et de rayon 1. Soit (D) la droite du plan $xOz$, dont l'équation est $z = 2$. Une tige AB, de longueur $AB = \sqrt{5}$, s'appuie par l'extrémité A sur le cercle (C) et par l'extrémité B sur la droite (D). Le point A est animé, sur le cercle (C), d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $\omega$. Étudier le mouvement de B.

On supposera qu'à la date $t = 0$, le point B a pour coordonnées : $x = 2$; $y = 0$; $z = 2$.

CHAPITRE V

# MOUVEMENTS SIMPLES D'UN CORPS SOLIDE

- *1. Mouvement de translation.*
- *2. Mouvement de rotation.*

## 1 MOUVEMENT DE TRANSLATION

■ **72. Corps solide.** — *On appelle* ***corps solide*** *un corps indéformable c'est-à-dire un ensemble de points dont les distances mutuelles demeurent invariables.*

Les figures géométriques : droites, plans, cercles, sphères, trièdes trirectangles, prismes, etc., sont des corps solides.

Si nous fixons deux points A et B du corps solide, il peut tourner autour de la droite AB. Si nous fixons un troisième point C non aligné avec A et B, la position du corps est déterminée. Pour cette raison, il nous arrivera, dans ce qui va suivre, de réduire un corps solide quelconque à trois de ses points non alignés A, B, C.

Le mouvement d'un point M quelconque du corps est déterminé quand les mouvements des points A, B, C sont connus.

L'étude des trajectoires des divers points M, celle des vecteurs-vitesses et des vecteurs-accélérations de ces points constituent la *cinématique du corps solide.*

Nous ne traiterons que deux cas particuliers.

■ **73. Définition.** — *Un corps solide est dit animé d'un* ***mouvement de translation*** *quand deux vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *de ce corps, ayant des supports distincts, restent équipollents à deux vecteurs fixes.*

Ce mouvement est évidemment possible puisque le triangle ABC n'est pas déformé pendant le mouvement.

■ **74. Propriété caractéristique.** — Soit ABC la position du corps solide à un instant $t$ et $\overrightarrow{MN}$ un vecteur quelconque du corps solide (fig. 87). Soit A'B'C' la position à l'instant $t'$. Les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont équipollents ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{AC}$. Soit $\overrightarrow{M'N'}$ la position du vecteur $\overrightarrow{MN}$ à l'instant $t'$.

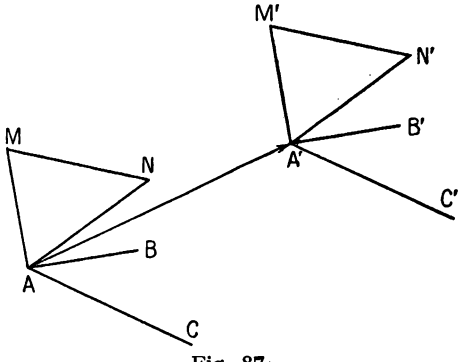


Fig. 87.

Transformons la figure ABCMN par la translation (tranformation géométrique) définie[1] par le vecteur $\overrightarrow{AA'}$. Le point B a pour homologue B' et le point C a pour homologue C'.

Il en résulte alors que la figure transformée de ABCMN coïncide avec la figure A'B'C'M'N' puisque trois points coïncident avec leurs homologues. C'est dire que M'N' est l'homologue de MN dans la transformation. Les deux vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont donc équipollents. Il en est de même des vecteurs $\overrightarrow{A'M'}$ et $\overrightarrow{AM}$ d'une part; $\overrightarrow{A'N'}$ et $\overrightarrow{AN}$ d'autre part.

Un vecteur quelconque du corps solide reste donc équipollent à l'une de ses positions.

**Inversement,** si un vecteur quelconque du corps solide reste équipollent à l'une de ses positions, il en est ainsi pour deux vecteurs particuliers $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et le mouvement du solide est bien un mouvement de translation.

1. Voir *Cours de Géométrie*, p. 115.

Nous énoncerons :

**Théorème.** — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps solide soit animé d'un mouvement de translation est qu'un vecteur quelconque du corps solide reste équipollent à l'une de ses positions.

• CONSÉQUENCE. — Il en résulte que pour définir un mouvement de translation d'un corps solide, il suffit de se donner arbitrairement le mouvement d'un point A du corps. Si M est un autre point du corps, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ restant équipollent à l'une de ses positions, le mouvement du point M est complètement défini.

⟶ Un mouvement de translation d'un corps solide est défini quand on se donne le mouvement d'un point du corps.

■ **75. Trajectoires.** — Soit (L) la trajectoire du point A (fig. 88). Soit M un point quelconque du solide. Pendant le mouvement, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ reste équipollent à lui-même. Il en résulte que le point M décrit la courbe transformée de la courbe (L) par la translation (transformation géométrique) définie par le vecteur $\overrightarrow{AM}$.

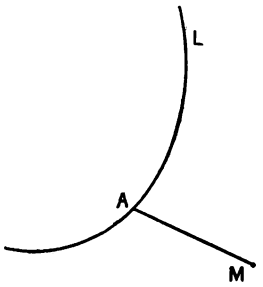


Fig. 88.

**Théorème.** — Quand un solide est animé d'un mouvement de translation, la trajectoire d'un point quelconque M est la transformée, par la translation géométrique définie par le vecteur $\overrightarrow{AM}$, de la trajectoire d'un point A du corps.

Toutes les trajectoires des divers points sont donc des courbes égales.

■ **76. Vitesses.** — Soit A et M les positions de deux points du solide à l'instant $t$, A′ et M′ les positions de ces points à l'instant $t + \Delta t$ (fig. 89). Les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M'}$ étant équipollents, il en est de même des deux vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ est $\overrightarrow{MM'}$ et aussi des quotients de ces deux vecteurs par $\Delta t$. Si on pose :

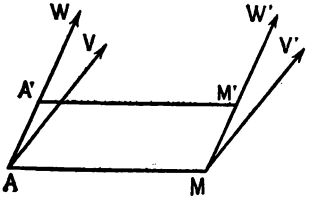


Fig. 89.

$$\overrightarrow{AW} = \frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta t}, \qquad \overrightarrow{MW'} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t},$$

on a : $$\overrightarrow{AW} = \overrightarrow{MW'}.$$

Or, quand $\Delta t$ tend vers zéro, le vecteur $\overrightarrow{AW}$ a pour limite le vecteur vitesse $\overrightarrow{AV}$ du point A. Le vecteur $\overrightarrow{MW'}$ a pour limite le vecteur vitesse du point $\overrightarrow{M}$. Ces deux vecteurs-vitesses sont donc équipollents. Nous énoncerons :

**Théorème.** — Quand un corps solide est animé d'un mouvement de translation, les vecteurs-vitesses de ses divers points, à un instant donné, sont équipollents.

Si la vitesse d'un point M du corps solide est constante, les vitesses de tous les points du corps solide sont constantes et on dit que le mouvement de translation du solide est *uniforme.*

■ **77. Réciproque.** — Considérons, inversement, un système de points en mouvement par rapport à un trièdre trirectangle $Oxyz$ et supposons, qu'à un instant quelconque, les vecteurs-vitesses de ces points soient toujours équipollents.

Soit A le point de coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$, où $x_0$, $y_0$, $z_0$ sont des fonctions de $t$. Désignons par M un autre point de coordonnées $x$, $y$, $z$, également fonctions de $t$. L'hypothèse se traduit par les relations :

$$x' = x'_0; \qquad y' = y'_0; \qquad z' = z'_0.$$

Les dérivées, par rapport au temps $t$, des fonctions : $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ sont donc nulles quel que soit $t$. Ces fonctions sont constantes et l'on peut écrire :

$$x - x_0 = a; \qquad y - y_0 = b; \qquad z - z_0 = c$$

où $a$, $b$, $c$ sont des constantes.

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ a donc des composantes constantes : il reste équipollent au vecteur fixe de composantes $a$, $b$, $c$.

On en conclut d'abord que l'ensemble des points constitue un corps solide puisque les distances mutuelles de ses points restent invariables et, de plus, que ce solide est animé d'un mouvement de translation.

Nous énoncerons :

**Théorème.** — Si un système de points en mouvement est tel qu'à un instant quelconque les vecteurs-vitesses de ces points soient toujours équipollents :

1° Le système est un corps solide.

2° Ce solide est animé d'un mouvement de translation.

■ **78. Accélération.** — Puisque dans un solide animé d'un mouvement de translation, les vecteurs-vitesses de tous les points, à un même instant, sont équipollents, l'hodographe, relatif à un point fixe, est le même pour tous les points du solide, cet hodographe étant parcouru de la même façon. A un instant donné, tous les vecteurs-accélérations des divers points du corps sont donc équipollents. Nous énoncerons :

**Théorème.** — Quand un corps solide est animé d'un mouvement de translation, les vecteurs-accélérations de ses divers points, à un instant donné, sont équipollents.

■ **79. Réciproque.** — Considérons, inversement, un corps solide en mouvement par rapport à un trièdre trirectangle $Oxyz$ et supposons qu'à un instant quelconque les vecteurs-accélérations de tous ses points sont équipollents.

Soit A un des points de coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$ où $x_0$, $y_0$, $z_0$ sont des fonctions de $t$. Désignons par M un autre point de coordonnées $x$, $y$, $z$, également fonctions de $t$. L'hypothèse se traduit par les relations :

$$x'' = x_0''; \qquad y'' = y_0''; \qquad z'' = z_0''.$$

Les dérivées, par rapport au temps $t$, des fonctions : $x' - x_0'$, $y' - y_0'$, $z' - z_0'$ sont donc nulles quel que soit $t$. Ces fonctions sont constantes et l'on peut écrire :

$$x' - x_0' = a; \qquad y' - y_0' = b; \qquad z' - z_0' = c$$

où $a$, $b$, $c$ sont des constantes.

Les fonctions $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ ayant des dérivées constantes, sont des fonctions linéaires d'où :

$$x - x_0 = at + l; \qquad y - y_0 = bt + m; \qquad z - z_0 = ct + n$$

où $l$, $m$, $n$ sont des constantes.

La distance AM est telle que l'on ait :

$$\overline{AM}^2 = (at + l)^2 + (bt + m)^2 + (ct + n)^2.$$

Or, le corps étant solide, cette distance doit être invariable. Le polynome du second degré en $t$ qui figure au second membre est donc constant. En particulier le coefficient de $t$, qui est $a^2 + b^2 + c^2$ doit être nul, donc $a = b = c = 0$.

On en déduit :

$$x - x_0 = l; \qquad y - y_0 = m; \qquad z - z_0 = n.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ reste équipollent à un vecteur fixe. Le corps solide est animé d'un mouvement de translation.

Nous énoncerons :

**Théorème.** — Si un corps solide se meut de manière qu'à un instant quelconque les vecteurs-accélérations de ses divers points soient équipollents, le corps solide est animé d'un mouvement de translation.

● REMARQUE. — Dans cette réciproque nous avons dû supposer que l'ensemble des points constitue un corps solide, alors que dans la réciproque concernant les vecteurs-vitesses nous avons établi que la solidité du corps résultait des hypothèses faites.

■ **80. Exemples de mouvements de translation.** — 1° Si la trajectoire d'un point d'un corps solide est une droite, on dit que le mouvement de translation du solide est *rectiligne.* Toutes les trajectoires sont alors des droites parallèles.

En pratique, on peut réaliser ce mouvement en assujettissant trois points non alignés du corps solide à décrire trois droites parallèles. Ce mouvement est très utilisé : c'est ainsi qu'un tiroir de meuble que l'on ouvre est animé d'un mouvement de translation rectiligne.

Ce mouvement peut être effectué plus ou moins rapidement, mais, à tout instant, les points du tiroir ont la même vitesse et la même accélération. Un autre exemple est fourni par une cabine d'ascenseur qui monte ou qui descend.

2° On rencontre, aussi, dans les applications usuelles, des mouvements de translation *circulaire.*

Imaginons, par exemple, deux roues égales reliées par une bielle AB (fig. 90), articulée aux roues en A et B. Quand la roue O tourne, la bielle entraîne la roue O′ et la bielle AB est animée d'un mouvement de translation circulaire. Il est évidemment indispensable que la longueur AB soit exactement égale à la distance des centres, afin que la figure OABO′ reste un parallélogramme dans toutes ses déformations.

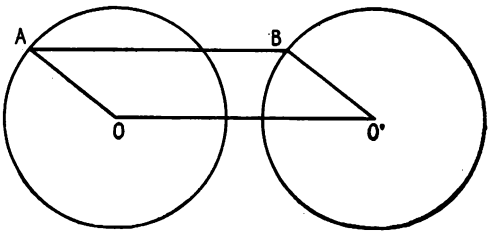


Fig. 90.

Cette circonstance se présente pour la bielle d'accouplement qui réunit deux roues voisines, d'un même côté, d'une locomotive. Cette bielle est un corps solide qui est animé, par rapport à la locomotive, d'un mouvement de translation circulaire.

# 2 MOUVEMENT DE ROTATION

■ **81. Définitions** • *Un corps solide est animé d'un* ***mouvement de rotation*** *quand deux points* A *et* B *du solide demeurent fixes.*

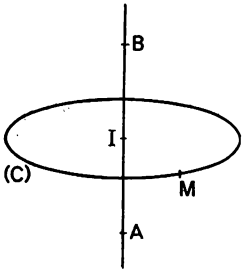


Fig. 91.

Il en résulte que tous les points du solide situés sur la droite AB sont également fixes, puisque leurs distances à A et B restent invariables (fig. 91).

• *La droite* AB *s'appelle* ***l'axe de rotation.***

Il est commode de l'orienter : les rotations autour de cet axe sont alors orientées.

■ **82. Trajectoires.** — Soit M un point quelconque du solide, non situé sur l'axe. Les distances MA et MB restant invariables, le point M reste sur les sphères de centres respectifs A et B et de rayons déterminés. Il décrit donc un cercle, centré sur AB et dont le plan est perpendiculaire à AB.

⟶ Les trajectoires des divers points du solide, non situés sur l'axe, sont des cercles qui admettent pour axe l'axe de rotation.

Cela revient à dire que chaque point du corps solide est animé d'un mouvement circulaire.

■ **83. Vitesses angulaires.** — Soit AB l'axe de rotation, C et M les positions de deux points du corps à l'instant $t$, C′ et M′ leurs positions à l'instant $t + \Delta t$. Soit $\Delta\theta$ la mesure algébrique de l'angle dièdre $(C, \overrightarrow{AB}, C')$.

Par définition du corps solide, on a (fig. 92) :

$$(G, \overrightarrow{AB}, M) = (C', \overrightarrow{AB}, M').$$

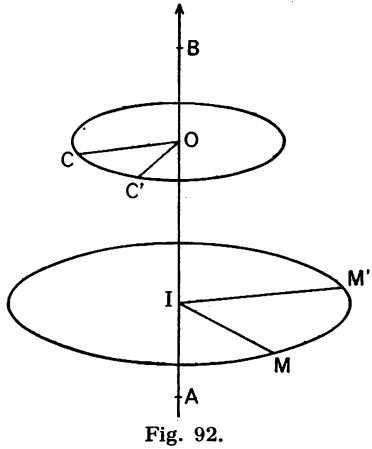


Fig. 92.

Or on a :

$$(C, \overrightarrow{AB}, M) = (C, \overrightarrow{AB}, C') + (C', \overrightarrow{AB}, M)$$

et :

$$(C', \overrightarrow{AB}, M') = (C', \overrightarrow{AB}, M) + (M, \overrightarrow{AB}, M').$$

Les seconds membres de ces égalités sont donc égaux.
On en déduit :

$$(C, \overrightarrow{AB}, C') = (M, \overrightarrow{AB}, M').$$

Le rapport $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ est donc le même pour C et pour M. Sa limite, quand $\Delta t$ tend vers zéro, est aussi la même pour tous les points du corps non situés sur l'axe. On sait que cette limite $\omega$ (ou $\theta'$) s'appelle la vitesse angulaire de ces points.

Nous énoncerons :

**Théorème.** — Quand un corps solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, les vitesses angulaires de tous les points du corps non situés sur l'axe sont les mêmes à un instant quelconque. Cette vitesse angulaire est appelée **vitesse angulaire** du solide.

■ **84. Vitesses.** — A l'instant $t$ où la vitesse angulaire est $\omega$, un point M, situé à la distance R de l'axe, a son vecteur vitesse $\overrightarrow{MV}$ tangent à la trajectoire de M. Le vecteur $\overrightarrow{MV}$ est donc perpendiculaire au plan MAB et a pour longueur $R\,|\,\omega\,|$ (fig. 93).

Les points équidistants de l'axe ont des vitesses égales à un instant quelconque. Plus les points sont éloignés de l'axe et plus leur vitesse est grande à un instant donné.

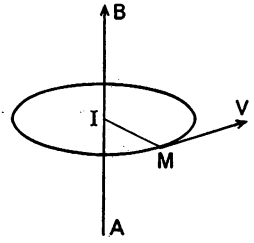


Fig. 93.

Si la vitesse angulaire est constante, le mouvement de rotation est dit *uniforme*. Chaque point du corps est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

■ **85. Exemples de mouvements de rotation.** — Les mouvements de rotation d'un corps solide sont très usuels : une porte, un volant de machine, une roue dentée d'un engrenage sont des solides animés d'un mouvement de rotation.

Si les efforts supportés par l'axe sont faibles, comme dans un mouvement d'horlogerie par exemple, on fixe le corps (S) à une tige dont on épointe les deux extrémités A et B (fig. 94). On fait reposer les deux pointes dans deux petites cuvettes fixes et le corps peut tourner autour de la droite AB.

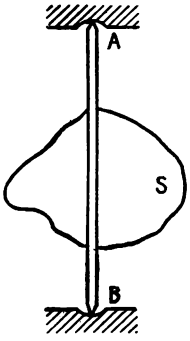


Fig. 94.

On dit que le corps (S) est monté sur deux *pointes*.

Si les efforts supportés par l'axe sont considérables, comme dans certaines pièces de machines, on fixe le corps solide (S) à un cylindre de révolution (C) d'axe (A) (fig. 95).

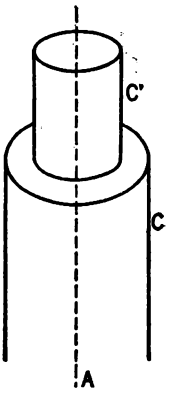


Fig. 95.

A chaque extrémité, le cylindre (C) est terminé par une section droite et prolongé par un cylindre de révolution (C'), appelé *tourillon*, de même axe et de rayon plus petit.

Les deux cylindres (C') tournent à l'intérieur de deux cylindres creux à peine plus grands (fig. 96), appelés *coussinets*, qui sont creusés dans un bâti fixe, dit *palier*. Les deux couronnes circulaires qui sont intermédiaires entre le cylindre (C) et les cylindres (C') s'appuient sur deux joues planes du bâti et tout glissement est ainsi impossible.

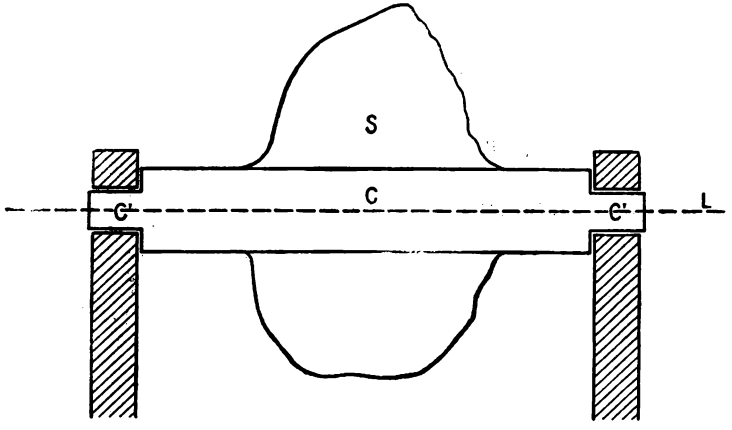


Fig. 96.

On utilise les coussinets, généralement, quand le corps (ou l'arbre) est horizontal. Quand l'arbre est vertical, on assure la

rotation en terminant cet arbre par une pièce dite *pivot* (A) qui, le plus souvent, a la forme d'un tronc de cône de révolution auquel se raccorde une calotte sphérique. Le pivot est supporté par une pièce dite *crapaudine* (B). On utilise aussi des *roulements à bille*. La partie supérieure de l'arbre est maintenue par des colliers (C) (fig. 97).

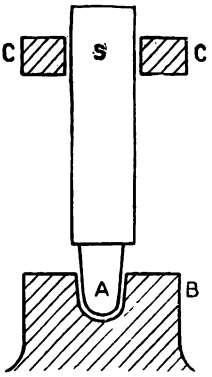


Fig. 97.

On connaît l'utilisation des *gonds* pour le mouvement de rotation d'une porte, et des *charnières* pour la rotation des couvercles de certaines boîtes.

## *EXERCICES SUR LE CHAPITRE V*

**102.** — Une barre OA tourne, autour de son extrémité O, dans un plan (P) d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $\omega$. A l'extrémité A est articulée une autre barre AB de même longueur dont l'extrémité B est assujettie à décrire dans le plan (P) une droite (D) passant par O.

Étudier le mouvement du point B.

**103.** — Un corps solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe ($\Delta$). Comment sont distribués, à un instant donné, les points du corps solide pour lesquels les vecteurs-vitesses sont situés dans un plan donné?

**104.** — Une droite ($\Delta$) d'un plan fixe tourne autour d'un point fixe O de ce plan. Trouver l'enveloppe des supports des vecteurs-vitesses des divers points de la droite à un instant donné.

**105.** — Un plan tourne autour d'un axe qui lui est perpendiculaire. Soit A et B deux points donnés du plan.

1° Peut-on déterminer l'axe de rotation connaissant les vecteurs-vitesses des deux points A et B à l'instant $t$?

2° Même question, en se donnant seulement le vecteur-vitesse du point A et le support du vecteur-vitesse du point B?

3° Même question, sachant seulement que les vitesses de A et de B sont égales.

4° Même question, en se donnant le vecteur-vitesse du point A et la longueur du vecteur-vitesse du point B.

**106.** — On suppose que la Terre est un corps solide qui tourne uniformément autour d'un axe fixe (ligne des pôles) en 23 h 56 mn.

1° Calculer la vitesse angulaire en rd/s.

2° En admettant que la Terre est une sphère dont un grand cercle a 40 000 km, calculer la vitesse et l'accélération d'un point de l'équateur. (unités : le km et la sec.).

3° Même question qu'au 2° pour un point pris à Paris dont la latitude est $\lambda = 48°50'$. (Le rayon de la trajectoire est $r = R\cos\lambda$, où R est le rayon de la Terre.)

# PROBLÈMES DE BACCALAURÉAT

## I. Mouvement rectiligne.

**107.** — Un mobile M décrit l'axe $Ox$ d'un mouvement uniformément varié.

1° Calculer son abscisse $x$ à la date $t$, sachant qu'à la date $t = 1$ le mobile passe à l'origine O des abscisses avec une vitesse algébrique $v$ égale à $+ 2$, et qu'à la date $t = 2$ il a une abscisse égale à $+ 5$ ?

2° Construire avec précision le diagramme des espaces et le diagramme des vitesses pour $0 \leqslant t \leqslant 3$. On prendra les échelles suivantes :

Unité de temps : 2 cm; unités de $x$ et de $v$ : 5 mm.

3° Déterminer les dates $t$ pour lesquelles le rapport $\frac{x}{v}$ a une valeur donnée $k$, le point M étant en outre astreint à avoir une abscisse inférieure à 1. Discuter.

**108.** — On considère deux axes de coordonnées rectangulaires $Ox$, $Oy$ et un point A de coordonnées $a$, $b$ ($a > 0$). Un premier mobile M, d'abscisse $x$, décrit $Ox$ d'un mouvement uniforme; pour $t = 0$, $x = 0$; pour $t = 1$ seconde, $x = 1$ cm. Un deuxième mobile P, d'ordonnée $y$, décrit la parallèle à $Oy$ passant par A d'un mouvement uniformément varié; pour $t = 0$ et $t = 4$ secondes, $y - b = 0$; pour $t = 1$ seconde, $y - b = 1{,}5$ cm.

1° Calculer $x$ et $y$ en fonction de $t$.

2° Quelle est la relation qui doit lier $a$ et $b$ pour que les deux mobiles se rencontrent? Tracer la courbe (C) sur laquelle il faut choisir A pour que la rencontre ait lieu.

3° Pour une position initiale A de P, il existe un point A′ d'ordonnée maximum; montrer que l'on passe simplement de A à A′ et construire la courbe (C′) lieu de A′ quand A décrit (C).

4° Calculer la vitesse $v$ de P au moment de sa rencontre avec M et distinguer, sur (C), les points A qui donnent $v > 0$ de ceux qui donnent $v < 0$.

5° Pour chaque point de rencontre I des deux mobiles, on marque le point J de même abscisse que I et ayant pour ordonnée la mesure algébrique de la vitesse de P au moment de la rencontre. Tracer le lieu de J et en déduire graphiquement le point A quand on connaît la mesure algébrique de la vitesse de P au moment de la rencontre. En particulier, comment faut-il choisir A pour qu'au moment de la rencontre la mesure algébrique de la vitesse de P soit :

*a*) égale à celle de M;

*b*) opposée à celle de M ?

**109.** — Un mobile parcourt une droite. Son abscisse $x$ sur cette droite, à la date $t$, est donnée par la formule :

$$x = -t^3 + 3t^2 - 2.$$

1° Calculer la vitesse et l'accélération en fonction du temps.

2° Construire la courbe représentative des variations de la vitesse, en se bornant à $t$ positif.

Déterminer la plus grande valeur positive de la vitesse.

3° Tracer la courbe représentative des variations de l'abscisse $x$ en fonction du temps, en se bornant à $t$ positif.

Dans la formule qui donne $x$, les deux premiers termes sont ceux du développement du cube du binome $(-t+1)$; utiliser cette remarque pour mettre l'expression de $x$ sous la forme d'un produit et montrer que $x$ est nul pour les valeurs 1 et $(1+\sqrt{3})$ de $t$.

**110.** — Deux mobiles parcourent un axe dirigé $xOx'$, l'un M d'un mouvement uniforme, l'autre P d'un mouvement uniformément varié. Ils passent tous deux à l'instant initial $t=0$ par l'origine O choisie sur l'axe. On donne la mesure $u_1$ du segment $\overline{MP}$ à la date $t_1$, et la mesure $u_2$ du même segment à la date $t_2$.

1° Ces données suffisent-elles à déterminer les mouvements de M et de P? Peuvent-elles tout au moins permettre de déterminer la date de la rencontre des deux mobiles, autre que celle réalisée à la date initiale?

2° Déterminer les deux mouvements en supposant connue, en outre de $t_1$, $u_1$ $t_2$, et $u_2$, la vitesse $v_0$ du mobile P à l'époque initiale.

*Application numérique :* $t_1 = 1$ seconde, $u_1 = 1$ mètre, $t_2 = 2$ secondes, $u_2 = -2$ mètres, $v_0 = 5$ mètres par seconde.

3° En se bornant à l'exemple numérique indiqué ci-dessus, tracer les diagrammes représentant les deux mouvements, en portant, avec des unités graphiques convenables que l'on indiquera, les temps en abscisses et les mesures de $\overline{OM}$ ou de $\overline{OP}$ en ordonnées.

**111.** — Un mobile M est abandonné sans vitesse initiale à l'instant $t=0$ en un point A d'abscisse positive $h$ sur une demi-droite $Ox$. L'équation horaire de ce mouvement, uniformément varié, est de la forme :

$$x = -t^2 + bt + c.$$

1° Déterminer les constantes $b$ et $c$. Calculer en fonction de $h$ la date $t_1$ de son arrivée en O et sa vitesse $-V_1$ à cette date.

2° On suppose qu'un obstacle arrêtant en O le mobile M, celui-ci reparte à la date $t_1$ en direction de A avec la vitesse $+V_1$ ($t_1$ et $V_1$ ayant les valeurs précédemment trouvées). Le mouvement est toujours uniformément varié et d'équation horaire :

$$x = -t^2 + b't + c'.$$

Déterminer les constantes $b'$ et $c'$.

Calculer la distance $OM_2 = h_2$ atteinte par M à l'instant où le mobile rebrousse chemin.

Pouvait-on prévoir le résultat?

Déduire des remarques faites la nature ultérieure du mouvement, l'obstacle restant placé en O.

3° Tracer le diagramme des abscisses en faisant varier $t$ de 0 à la date $t_2$ du passage en $M_2$.

4° On suppose maintenant que la vitesse à la date $t=0$ a une valeur négative $-V_0$. Calculer $-V_1$ et $h_2$, l'équation horaire ayant toujours la forme $x = -t^2 + b''t + c''$, le même obstacle en O jouant le même rôle que dans la question 2°.

5° Indiquer, sans nouveaux calculs, la nature du mouvement si la vitesse à l'instant $t=0$ a cette fois la valeur positive $V_0$.

**112.** — Sur une droite $x'Ox$, orientée de gauche à droite, un point M se déplace d'un mouvement uniformément varié : son accélération est de 2 mètres par sec$^2$ et est dirigée vers $Ox'$; à l'instant initial il passe au point O avec une vitesse dirigée vers $Ox$ de 5 m par seconde. Un deuxième mobile N se déplace sur la même droite d'un mouvement uniforme dans le sens $Ox$ avec une vitesse de 2 m par seconde; à l'instant initial il passe au point A de $Ox$, à 2 m à droite de O.

1° Trouver les instants et les positions des rencontres des deux points.

2° Étudier la variation, avec le temps, de la distance NM, et indiquer, en particulier, à quelle date le point M se trouve le plus loin possible à droite de N. Quelle est alors leur distance et la vitesse de M?

**113.** — Deux mobiles M et P sont animés de mouvements uniformément variés sur un même axe orienté X'X. On sait en outre que :

1° à la date $t = 0$, les deux mobiles sont en un même point O, qu'on prendra comme origine des abscisses, et que la vitesse de M est nulle;

2° que le milieu de MP a une vitesse constante $v_0$ donnée;

3° que M et P se rencontrent de nouveau à un moment donné $t = \theta$.

Calculer, en fonction du temps $t$, $\overline{OM}$, $\overline{OP}$ et $\overline{MP}$ ; étudier leurs variations en supposant $v_0$ et $\theta$ positifs (on cherchera à représenter sur un même graphique les variations des trois fonctions).

Étudier la variation du rapport de la vitesse de P à celle de M.

**114.** — Sur l'axe $Ox$, on donne un point A, d'abscisse positive $a$.

Un mobile M part de O, à la date zéro, avec une vitesse initiale positive $v_0$ et une accélération constante et égale $+ 2$. Un deuxième mobile P part en même temps de A, avec une vitesse initiale négative $- v_1$ et une accélération constante et égale à $+ 4$.

1° Trouver la condition pour que les deux mobiles se rencontrent et dire combien de fois ils se rencontreront. Montrer que, dans le cas d'une rencontre unique, au moment où elle se produit, les deux mobiles vont dans le même sens et ont même vitesse.

2° Montrer qu'on peut trouver un troisième mobile qui, animé d'un mouvement uniforme, rencontrerait aux mêmes dates les deux mobiles précédents. Calculer sa vitesse et sa position initiale.

3° On suppose que les vitesses $v_0$ et $v_1$ sont telles, qu'au bout d'une seconde, M se trouve au milieu de OA et que P se retrouve en A. Sur quelle portion de $Ox$ doit alors se trouver le point A pour qu'il y ait rencontre?

Cas de la rencontre unique : date et position de cette rencontre.

**115.** — Deux mobiles $M_1$ et $M_2$, décrivent le même axe $Ox$, animés tous les deux d'un mouvement uniformément varié : $M_1$ part de O avec une vitesse de 6 mètres par seconde et met 6 secondes pour arriver au point A d'abscisse 90 mètres.

2 secondes après le départ de $M_1$, le mobile $M_2$ passe en O en se dirigeant vers les abscisses positives avec une vitesse de 36 mètres par seconde, et atteint son abscisse maximum 3 secondes après son passage en O.

1° Trouver les équations des mouvements de ces deux mobiles et donner leurs accélérations.

2° En admettant que la rencontre de ces deux mobiles ne modifie en rien leurs mouvements ultérieurs, trouver à quels instants, en quels points et avec quelles vitesses ils se rencontrent.

3° En augmentant la vitesse de départ du mobile $M_1$, toutes les autres données restant les mêmes, les deux mobiles se rencontrent-ils encore? Trouver la valeur maxima de cette vitesse pour que la rencontre ait lieu.

**116.** — On considère deux mobiles $m$ et M parcourant respectivement deux droites parallèles ($d$) et (D). Soit $u = \overline{om}$, $U = \overline{OM}$, les abscisses de $m$ et M comptées à partir de deux origines quelconques $o$, O sur ($d$) et (D).

1° Exprimer $u$ en fonction du temps $t$ en supposant que $m$ soit animé d'un mouvement uniformément varié dont on connaît l'accélération $\gamma$, la vitesse initiale $w$ et l'abscisse initiale $a$.

2° Calculer à quelle époque $t_1$ la vitesse de $m$ est nulle.

3° Quelle serait l'expression de $u$ en fonction du temps compté à partir du moment où la vitesse de $m$ est nulle, c'est-à-dire en fonction de $\theta = t - t_1$?

4° Soit ($\Delta$) une droite parallèle à ($d$) et à (D), $\omega$ son intersection avec $oO$, P son intersection avec $mM$, enfin $x = \overline{\omega P}$.

Calculer $x$ en fonction de $u$ et U, connaissant $r = \overline{\omega o}$ et $R = \overline{\omega O}$.

5° Supposons que M soit aussi animé d'un mouvement uniformément varié et désignons par $\Gamma$, W, A les quantités (correspondant à $\gamma$, $w$, $a$) caractérisant le mouvement de M. Si M et $m$ sont des positions des deux premiers mobiles qui sont occupées au même instant $t$, l'abscisse $x$ du troisième mobile P sera une fonction de $t$ bien déterminée et qu'on demande de calculer.

6° En général, le mouvement de P sera, dans ces conditions, uniformément varié. Dans quel cas particulier ce mouvement sera-t-il uniforme?

7° Dans quel cas particulier, le point P restera-t-il fixe quand $m$ et M se déplacent?

**117.** — Un mobile M se déplace sur un axe rectiligne orienté, de manière que son abscisse soit donnée en fonction de la date $t$ par la formule :

$$x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{2}.$$

1° Calculer à la date $t$ la vitesse et l'accélération.

2° Étudier le mouvement du point quand la date $t$ varie de $-\infty$ à $+\infty$. Préciser les dates entre lesquelles le mouvement est soit accéléré, soit retardé. Préciser toutes les circonstances du mouvement à la date $t = 3$.

3° Tracer sur un même graphique les courbes :
(C), indiquant la variation de l'abscisse;
(P), indiquant la variation de la vitesse;
(D), indiquant la variation de l'accélération.

**118.** — Deux mobiles $M_1$ et $M_2$ se déplacent sur une droite orientée (D); leurs abscisses à partir de la même origine A ont pour expressions respectives :

$$x_1 = a \sin 2t, \qquad x_2 = a \cos 2t,$$

où $a$ est une constante positive et où $t$ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Dans un système d'axes rectangulaires, $Ot$, $Ox$, on trace les diagrammes des espaces parcourus; on choisira la même longueur pour représenter sur $Ot$ l'unité de temps et sur $Ox$ l'unité d'abscisse.

1° Déterminer $a$ pour que les diagrammes se coupent à angle droit.

2° Un troisième mobile M, se déplace sur (D); son abscisse à partir de A a pour expression :

$$x_3 = b \operatorname{tang} t + c \operatorname{cotg} t, \qquad b \geqslant c > o,$$

où $t$ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Tracer le diagramme de ce mouvement av ec les mêmes unités graphiques

3° Étudier les points de rencontre de $M_1$ et de $M_3$, en supposant qu'une de ces rencontres a lieu au temps $t = \frac{\pi}{4}$.

4° Les diagrammes de $M_1$ et de $M_3$ étant rapportés aux mêmes axes et une de leurs rencontres ayant lieu au temps $t = \frac{\pi}{4}$, déterminer $a$, $b$ et $c$ de façon que les diagrammes soient tangents.

**119.** — Un point M se déplace sur un axe orienté (D). A l'origine des temps, le mobile est en O; l'unité de temps est la seconde. Dans la 1re seconde, le mouvement est uniforme et de vitesse $(a)$; dans la 2e seconde, il est encore uniforme, mais de vitesse $(a + \alpha)$; d'une manière générale, dans la $p^{ième}$ seconde, le mouvement est uniforme, de vitesse $a + (p - 1)\alpha$; on suppose $a$ et $\alpha$ positifs.

1° Déterminer la position de M à la fin de la $n^{ème}$ seconde; représenter graphiquement le mouvement en portant les temps en abscisses et les espaces en ordonnées. On trouve une ligne polygonale P.

2° Déterminer sur (D) un mouvement uniformément varié, d'un point M', tel que, pour les valeurs entières du temps, les deux points M et M' coïncident. Montrer que ce mouvement est représenté graphiquement par une parabole P' circonscrite à P.

3° Calculer le maximum de la distance des points M et M' dans l'intervalle de deux coïncidences.

4° On effectue la représentation graphique en adoptant, pour l'unité de longueur et pour l'unité de temps un segment égal à 1 centimètre; évaluer sur le graphique l'aire comprise entre la parabole et un côté de P.

5° Déterminer la date à laquelle le mobile M atteint une position donnée A (OA = $h$; $h$ étant supposé positif. Effectuer les calculs en supposant :

$$a = 7 \text{ m/sec.} \qquad \alpha = 4 \text{ m/sec.} \qquad h = 370 \text{ m.}$$

Interpréter la solution négative.

**120.** — 1° Un mouvement rectiligne est représenté par l'équation :

$$x = \alpha t - \beta t^2, \tag{1}$$

$\alpha$ et $\beta$ étant des constantes données. A l'origine des temps, le mobile est donc à l'origine O des abscisses avec une vitesse égale à $\alpha$.

Calculer la vitesse $v$ du mobile à l'instant $t$.

2° Nous admettons qu'un certain coureur, fournissant à chaque instant le maximum de l'effort dont il est capable, voit sa vitesse diminuer proportionnellement au temps, en sorte que son mouvement est représenté par l'équation (1) avec $\alpha = 10$, $\beta = \frac{1}{20}$, l'unité de longueur étant le mètre et l'unité de temps étant la seconde. La formule (1) reste valable jusqu'à l'instant $t_1$ auquel la vitesse s'annule; à ce moment, le coureur s'arrête, épuisé.

Calculer $t_1$, et la distance parcourue $x_1$.

3° Dans une autre course, le coureur part avec une certaine vitesse $a$, inférieure à $\alpha$. Son mouvement est uniforme jusqu'à l'instant $\theta$ où il a parcouru la même distance $d$ que s'il avait procédé comme à la question 2°. On a donc :

$$d = a\theta = \alpha\theta - \beta\theta^2 \tag{2}$$

avec $\alpha = 10$ et $\beta = \frac{1}{20}$. On suppose qu'à cet instant $\theta$ la vitesse $a$ représente le maximum de ce que peut fournir le coureur et que, à partir de cet instant, la vitesse décroît proportionnellement au temps suivant la même loi qu'à la question 2°.

Montrer que, pour $t > \theta$, l'équation du mouvement est :

$$x = d + a(t - \theta) - \beta(t - \theta)^2 \tag{3}$$

et cela jusqu'à ce que la vitesse s'annule. Calculer la valeur minimum de $a$ pour que la distance $x_1$ soit parcourue avant que cette éventualité ne se produise. Calculer le temps $t_2$ mis à parcourir la distance $x_1$ dans ces conditions.

## II. Mouvement curviligne.

**121.** — On donne deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$ et sur $Ox$ un point A tel que $OA = 1$. Sur OA comme diamètre on décrit une circonférence. C étant un point quelconque de cette circonférence on trace OC, CA et sur le prolongement de OC on prend $CM = m\text{CA}$, $m$ désignant un nombre positif donné.

1° Quel est le lieu de M?

2° Calculer les coordonnées de M en fonction de l'angle $\widehat{AOC} = \theta$.

3° On suppose que C décrive la circonférence OA d'un mouvement uniforme avec la vitesse angulaire $2\omega$, calculer la vitesse et l'accélération des projections de M sur $Ox$ et $Oy$.

4° Calculer dans les mêmes conditions qu'au 3°, la grandeur de la vitesse et celle de l'accélération de M.

**122.** — Un point M est mobile dans un plan et ses coordonnées, en fonction du temps $t$, sont données par les relations :

$$x = a(1 + \cos t), \qquad y = b \sin t,$$

$a$ et $b$ étant deux longueurs données ($a > b$).

1° Montrer que la trajectoire de ce point M est une ellipse. Position de cette ellipse.

2° Calculer, à une date quelconque, la vitesse du mobile, et chercher à quelles dates la vitesse du mobile a une valeur absolue égale à un nombre positif donné $v$. Discussion.

3° Le vecteur vitesse peut-il être normal au vecteur accélération?

4° Déterminer l'hodographe du mouvement du point M.

**123.** — On donne, dans un plan, deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$.
Les coordonnées $x$ et $y$ d'un point M mobile dans le plan, sont données en fonction du temps $t$, par les formules :

$$x = \cos t$$
$$y = \sin t - \cos t.$$

1° Étudier les variations de $x$ et de $y$ et construire la trajectoire.

2° Étudier les variations de la longueur $r$ du rayon vecteur OM, après avoir mis $r^2$ sous la forme :

$$a + b\cos(2t + \alpha)$$

$a$, $b$ et $\alpha$ étant des constantes.

3° Quelle relation y a-t-il entre les valeurs de $t$ qui correspondent au maximum et au minimum de $r$?

4° Quelle relation y a-t-il entre les valeurs de $t$ pour lesquelles $r$ a une même valeur?

5° Déterminer le vecteur-vitesse. Calculer la grandeur $v$ du vecteur-vitesse.
Montrer que l'hodographe du mouvement est une courbe égale à la trajectoire.
Quelle relation y a-t-il entre $r$ et $v$?

6° Déterminer le vecteur-accélération.

**124.** — On donne deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$.

1° Un point A se meut sur $Ox$ d'un mouvement uniformément varié d'accélération 4. A l'instant choisi comme origine des temps, l'abscisse A est 1 et sa vitesse est $-2$. Former l'équation horaire du mouvement du point A.

Un point B se meut sur $Oy$ d'un mouvement uniforme de vitesse 2. A l'instant pris pour origine des temps, son ordonnée est $-\frac{1}{4}$. Former l'équation du mouvement de B.

2° On considère le point M qui, à l'instant $t$, se projette sur les axes en A et B. Former le coefficient angulaire de la droite OM et étudier sa variation quand $t$ varie de $-\infty$ à $+\infty$. Indiquer, dans chaque intervalle que l'on est amené à considérer, le sens dans lequel tourne OM. Que peut-on dire des positions limites de OM?

3° On considère le point F d'abscisse 1 et d'ordonnée $\frac{3}{4}$. Calculer la distance MF et vérifier qu'elle est égale à l'abscisse de M. Déduire de là le lieu que décrit M quand $t$ varie et retrouver les résultats de la deuxième partie.

**125.** — 1° Un point mobile M est animé d'un mouvement rectiligne déterminé par l'équation :

$$x = \sin 2t - 2\sin t.$$

Étudier ce mouvement. Construire le diagramme ainsi que le diagramme des vitesses et celui des accélérations (courbes obtenues en portant en abscisses le temps et en ordonnées la grandeur à représenter : espace, vitesse ou accélération).

2° Un mobile P décrit une circonférence de centre O, de manière que le point M soit à chaque instant la projection du point P sur l'axe $Ox$. Quel est le rayon de cette circonférence (le point P doit décrire la circonférence entière et non pas un arc seulement)? Calculer la vitesse du point P et son accélération.

**126.** — 1° Un angle constant $\widehat{UOV} = \frac{3\pi}{4}$ tourne avec une vitesse angulaire constante $\omega$ autour de son sommet situé au point de contact O de deux cercles tangents (C) et (C′) de même rayon $a$ et de centres C et C′. Montrer que les points M et M′ d'intersection de OU et OV avec les cercles (C) et (C′) ont une vitesse constante et que l'angle des vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{C'M'}$ reste constant. (On supposera que les côtés OU et OV restent toujours de part et d'autre de la tangente commune en O aux deux cercles.)

2° On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le point M est diamétralement opposé au point O et l'on rapporte le plan au système d'axes de coordonnées formé de la droite C′C orientée de C′ vers C et de la tangente commune en O. Écrire les coordonnées des points M, M′ et du milieu I du segment MM′; en déduire que la trajectoire du point I est un arc de cercle de centre O.

3° Quelle est la trajectoire de l'extrémité J du vecteur $\overrightarrow{OJ}$, résultante des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$? Déterminer sa vitesse et son accélération?

**127.** — Soit $Ox$ et $Oy$, deux diamètres rectangulaires de deux cercles concentriques dont les rayons sont égaux à $a$ et à $b$ ($a > b$). Une demi-droite variable OP coupe en P le cercle de rayon $a$, en Q le cercle de rayon $b$. Soit $\theta$ l'angle de OQP avec $Ox$, et M l'intersection de la parallèle à $Oy$ menée par P et de la parallèle à $Ox$ menée par Q.

1° Calculer les coordonnées, relatives aux axes $Ox$ et $Oy$, du point M et déterminer le lieu géométrique de ce point.

2° $\theta$ variant proportionnellement au temps, on suppose l'unité de temps choisie de telle sorte que $\theta$, exprimé en radians, soit égal au temps $t$. Quelles sont alors les vitesses et les accélérations des projections de M sur $Ox$ et $Oy$?

3° Construire l'hodographe du mouvement de M. En déduire une construction de la vitesse. Quelle particularité présente l'accélération de M?

**128.** — Soit une parabole (P). On appelle O le sommet, $Ox$ l'axe, $Oy$ la tangente au sommet, $p$ le paramètre, F le foyer, (D) la directrice, A la projection de O sur D. Un point M se déplace sur (P) de telle manière que sa projection H sur (D) ait un mouvement uniforme de vitesse $p$ et se trouve en A au temps zéro.

1° Calculer les coordonnées $x$, $y$ de M au temps $t$, les projections de son vecteur vitesse $\overrightarrow{MV}$ et de son vecteur accélération $\overrightarrow{M\gamma}$ sur les axes.

2° On fait tourner $\overrightarrow{MV}$ d'un angle droit autour de M, dans le sens de $Oy$ vers $Ox$. Le point V vient en N. Démontrer que N est sur $Ox$. En déduire une propriété connue de la sous-normale de la parabole.

3° Soit $r$ la distance FM. Démontrer que la vitesse $v$ de M vaut $\sqrt{2pr}$.

4° On appelle $\frac{1}{h}$ le temps que mettrait un point pour parcourir le segment AF d'un mouvement uniforme ayant la vitesse $v$ du point M au temps $t$. On pose $t_1 = t + h$, $t_2 = t - h$ et l'on appelle $M_1$ et $M_2$ les positions de M aux temps $t_1$ et $t_2$, $v_1$ et $v_2$ les vitesses correspondantes. Calculer la distance $M_1M_2$. En déduire que la corde $M_1M_2$ passe par F. Démontrer que $v_1^2 + v_2^2 = 4v^2$ et que $\overrightarrow{M_1V_1}$ et $\overrightarrow{M_2V_2}$ sont perpendiculaires.

5° Soit I le milieu de $M_1M_2$. On appelle K la position de M au temps $2t$. Démontrer que I est homologue de K dans une homothétie de centre et de rapport fixes, que l'on déterminera. En déduire la trajectoire de I.

6° On appelle Q le point de rencontre de (D) avec la tangente en M à (P). Calculer son ordonnée Y et sa vitesse $w$. Vérifier que $v^2 = 4wx$. Démontrer que les points $Q_1$ et $Q_2$ correspondant à $M_1M_2$ sont tous deux en H et que FH est perpendiculaire à $M_1M_2$.

**129.** — On donne un demi-cercle de diamètre AB = 2. Un point M se meut sur ce demi-cercle dans le sens trigonométrique de telle sorte que la vitesse angulaire de AM ait une valeur constante; le demi-cercle est décrit en $\pi$ secondes.

1° Vecteur-vitesse du point M à un instant donné $t$, compris entre 0 et $\pi$.

2° Sur AM, de A vers M, on porte MN = $l$ (longueur donnée). Construire le vecteur-vitesse $\overrightarrow{NV}$ de N à l'instant $t$. Calculer la longueur de ce vecteur en fonction de $l$ et $t$. Calculer $l$ pour qu'à l'instant $t = \frac{\pi}{4}$ la longueur $\overrightarrow{NV}$ soit égale à 2?

3° Trouver, à l'instant $\frac{\pi}{4}$, le lieu des extrémités V des vecteurs-vitesses $\overrightarrow{NV}$ quand on donne à la longueur $l$ toutes les valeurs possibles.

4° Démontrer que tous les vecteurs-vitesses $\overrightarrow{NV}$ des différents points N, considérés comme précédemment au même instant $t = \frac{\pi}{4}$ sont tangents à une même parabole de sommet A et de tangente au sommet AN.

**130.** — On donne une sphère de centre O de rayon $2a$, et trois axes $Ox$, $Oy$, $Oz$ formant un trièdre trirectangle. La demi-droite $Ox$ coupe la sphère en A, l'axe $Oz$ coupe la sphère en C et C′.

Un grand cercle CMC′ de la sphère tourne autour de $Oz$ avec une vitesse angulaire constante $\omega = 1$ (un radian par seconde). M se déplace sur ce cercle avec une vitesse angulaire constante $\omega = 1$. A l'instant initial il est en A sur $Ox$. On appellera $m$ et P les projections de M sur le plan $xOy$ et sur l'axe $Oz$.

1° Montrer que les coordonnées de M en fonction du temps $t$ sont :

$$x = a(1 + \cos 2t), \qquad y = a \sin 2t, \qquad z = 2a \sin t.$$

2° Étudier le mouvement de la projection $m$ de M sur le plan $xOy$ (trajectoire, vitesse, nature du mouvement; préciser le vecteur-accélération).

3° Qu'est le mouvement de P? Préciser son vecteur-accélération. Du paragraphe 2 et du paragraphe 3 déduire une construction simple du vecteur-accélération de M.

4° La trajectoire (T) décrite par M est l'intersection de la sphère et d'un cylindre de révolution de diamètre OA; montrer que c'est aussi l'intersection de la sphère et d'un cône de révolution de sommet A, ayant un demi-angle au sommet de 45° et dont on précisera l'axe.

En déduire quelle est la courbe (C) inverse de (T) dans l'inversion de centre A, de puissance $8a^2$. Préciser les éléments usuels de (C).

Trouver les tangentes à (T) au point A. Dessiner alors le mieux possible la trajectoire (T).

N. B. — Le 4° est en grande partie indépendant des 1°, 2°, 3°.

# RÉSUMÉ
# FORMULAIRE

# 1 CINÉMATIQUE DU POINT

## ■ 1. Vecteur-vitesse $\overrightarrow{MV}$.

| | |
|---|---|
| Direction | $\overrightarrow{MV}$ est porté par la tangente en M à la trajectoire et il a le sens du mouvement. |
| Mesure | Sa mesure $v$, sur la demi-tangente directe à la trajectoire, est égale à la dérivée, par rapport au temps $t$, de l'abscisse curviligne $s$ : $v = s'(t)$. |
| Projections | Ses projections sur trois axes de coordonnées sont égales aux dérivées, par rapport au temps $t$, des coordonnées $x, y, z$ du point : $v_x = x'$ $v_y = y'$ $v_z = z'$. |
| Propriété particulière | Pour qu'un mouvement soit *rectiligne* il faut et il suffit que le vecteur vitesse ait, quel que soit $t$, une direction fixe ou que : le support du vecteur-vitesse, passe, quel que soit $t$, par un point fixe. |

## ■ 2. Vecteur-accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$.

| | |
|---|---|
| Direction | $\overrightarrow{M\Gamma}$ est équipollent au vecteur-vitesse du point associé sur l'hodographe, au même instant. |
| Projections | Ses projections sur trois axes de coordonnées sont : $\gamma_x = x''$; $\gamma_y = y''$; $\gamma_z = z''$ (dérivées secondes de $x$, $y$, $z$ par rapport au temps). |
| Propriétés particulières | 1° Pour qu'un mouvement soit *rectiligne et uniforme* il faut et il suffit que le vecteur-accélération soit constamment nul.<br>2° Pour qu'un mouvement soit *rectiligne* il faut et il suffit que le vecteur-accélération soit porté par la tangente à la trajectoire, quel que soit $t$.<br>3° Pour qu'un mouvement *rectiligne* soit *accéléré* il faut et il suffit que le vecteur-accélération soit dirigé dans le sens du mouvement.<br>4° Pour qu'un mouvement *rectiligne* soit *uniformément varié* il faut et il suffit que le vecteur-accélération reste équipollent à un vecteur fixe de même direction que la droite trajectoire.<br>5° Pour qu'un mouvement soit *curviligne* et *uniforme* il faut et il suffit que le vecteur-accélération soit constamment normal à la trajectoire. |

## ■ 3. Mouvement rectiligne.

| NOM | ÉQUATION HORAIRE | VITESSE à l'instant t | ACCÉLÉRATION à l'instant t |
|---|---|---|---|
| Uniforme | $x = vt + x_0$ | $v$ (constante) | 0 |
| Uniformément varié | $x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + x_0$ | $v = \gamma t + v_0$ | $\gamma$ (constante) |
| Vibratoire simple | $x = x_0 + A\cos\omega t + B\sin\omega t$<br>période : $T = \frac{2\pi}{\omega}$<br>abscisse du centre $= x_0$<br>amplitude $= \sqrt{A^2 + B^2}$ | $v = \omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t)$ | $\gamma = -\omega^2 x$ |
| Quelconque | $x = f(t)$ | $v = f'(t$ | $\gamma = f''(t)$ |

## ■ 4. Mouvement circulaire.

La trajectoire est un cercle (centre O, rayon R) sur lequel le point mobile M est repéré par son ***angle polaire :***

$$\theta = f(t).$$

***Vitesse angulaire :*** $\omega = f'(t).$

***Vitesse :*** $\boxed{v = R\omega.}$

Si le mouvement est *uniforme*, $\omega$ et $v$ sont constants et le vecteur-accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$, dirigé de M vers O, a pour longueur :

$$\boxed{\gamma = \omega^2 R.}$$

La projection orthogonale, sur une droite, d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme, est animée d'un mouvement rectiligne vibratoire simple.

## 2 CINÉMATIQUE DU CORPS SOLIDE

■ **5. Corps solide.** — Ensemble de points dont les distances mutuelles demeurent invariables.

■ **6. Translation.** — *1° Définition.* **Deux vecteurs du corps, ayant des supports de directions distinctes, restent équipollents à eux-mêmes.**

*2° Propriétés. a*) Un vecteur quelconque du corps solide reste équipollent à lui-même.

*b*) Toutes les trajectoires sont égales.

*c*) Les vecteurs-vitesses des divers points, à un instant donné, sont équipollents.

**Réciproquement,** si un système de points en mouvement est tel qu'à un instant quelconque, les vecteurs-vitesses de ces points soient toujours équipollents :

le système est un corps solide et ce solide est animé d'un mouvement de translation.

*d*) Les vecteurs-accélérations des divers points, à un instant donné, sont équipollents.

**Réciproquement,** si un corps *solide* se meut de manière qu'à un instant quelconque, les vecteurs-accélérations de ses points soient équipollents, le corps solide est animé d'un mouvement de translation.

■ **7. Rotation.** — *1° Définition.* **Deux points distincts A et B du solide demeurent fixes. La droite AB est l'axe de rotation.**

*2° Propriétés. a*) Tous les points de la droite AB sont fixes.

*b*) Les trajectoires des points du corps solide, non situés sur l'axe, sont des cercles qui admettent pour axe l'axe de rotation.

*c*) Les vitesses angulaires, à un instant donné, des points non situés sur l'axe sont égales. C'est la vitesse angulaire du solide, à cet instant.

# TABLE


CHAPITRE PREMIER

**Vecteurs** (revision).

1. Rapport de deux vecteurs parallèles . . . . . 1
2. Somme vectorielle . . . . . 8
3. Théorèmes des projections . 11
4. Repérage d'un point . . . . 14

*Exercices sur le chapitre premier* . . . . . 17

CHAPITRE II

**Vecteur-vitesse.**

1. Trajectoire. . . . . 19
2. Mouvement rectiligne uniforme. . . . . 23
3. Cas général . . . . . 29
4. Diagrammes . . . . . 44

*Exercices sur le chapitre II* . . 47

CHAPITRE III

**Vecteur-accélération.**

1. Définition du vecteur-accélération. . . . . 49
2. Cas d'un mouvement rectiligne . . . . . 55
3. Mouvement rectiligne uniformément varié. . . . . 60
4. Résumé . . . . . 67

*Exercices sur le chapitre III* . . 69

CHAPITRE IV

**Mouvements périodiques.**

1. Mouvement circulaire uniforme. . . . . 73
2. Mouvement rectiligne vibratoire simple. . . . . 80
3. Construction de Fresnel. . . 86

*Exercices sur le chapitre IV* . . 91

CHAPITRE V

**Mouvements simples d'un corps solide.**

1. Mouvement de translation. . 92
2. Mouvement de rotation. . . 98

*Exercices sur le chapitre V.* . . 101

PROBLÈMES DE BACCALAURÉAT. 102

RÉSUMÉ-FORMULAIRE . . . . 111

Imprimé en France
par
BRODARD-TAUPIN
Imprimeur-Relieur
Coulommiers-Paris
1er dépôt : 2e trim. 1955
Dépôt légal : 2e tr. 1961
n° 2648
56956-VI-4-3922.